

O MÉTODO DE NEWTON PARA OBTER PARAMETRIZAÇÕES DE CURVAS PLANAS

Marina Michel (PIC/UEM), Marcelo Escudeiro Hernandes (Orientador). E-mail: mehernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática, Álgebra/Geometria Algébrica.

Palavras-chave: Geometria Algébrica, Polígono de Newton, polinômios quase-homogêneos.

RESUMO

No projeto desenvolvido, estudamos um método, devido a Newton, que permite obter uma parametrização de uma curva plana irredutível por meio de sua equação implícita. O método abordado emprega o chamado polígono de Newton associado a uma série de potências na sua forma de Weierstrass.

INTRODUÇÃO

Em Geometria Algébrica, dentre os objetos mais estudados, encontram-se as curvas planas. Tais objetos podem ser descritos de vários modos, dois formatos são os mais comuns: equações implícitas e parametrizações (BRIESKORN, 1986; CASAS, 2000). Converter um formato em outro é uma questão importante na área e útil para que propriedades possam ser investigadas independentemente do modo com que a curva é apresentada.

No projeto desenvolvido, abordamos um algoritmo, comumente chamado de Método de Newton, que possibilita obter aproximações para uma solução $y(x^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$ de uma equação $f(x, y) = 0$ em que $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Considerando $x = t^n$ obtemos $y(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, tal que $f(t^n, y(t)) = 0$. O par $(t^n, y(t))$ é o que chamamos parametrização da curva.

Para o entendimento e aplicação do método, foi necessária uma revisão da literatura sobre o tema e o estudo de conceitos como o teorema da preparação de Weierstrass e o polígono de Newton associado a uma série de potências.

REVISÃO DE LITERATURA

Para o entendimento e justificativa do método de Newton foi necessário a compreensão de alguns resultados referentes às séries de potências formais, como abordado em (RUIZ, 1993).

Dentre os resultados explorados destacamos o Teorema da Preparação de Weierstrass (veja HEFEZ, 2003; HIRSCHFELD *et al.*, 2008):

Teorema da Preparação de Weierstrass. Seja $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ tal que $f(0, y) = y^m \cdot u(y)$, em que $u(0) \neq 0$ e $\text{mult}(f) = m > 0$. Então existe um único $R \in \mathbb{C}[[x, y]]$, invertível, tal que

$$R(x, y) \cdot f(x, y) = P(x, y) = y^m + R_1(x)y^{m-1} + R_2(x)y^{m-2} + \dots + R_m(x),$$
 com $P(x, y) \in \mathbb{C}[[x]][y]$, $R_i(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ e $\text{mult}(R_i(x)) \geq i$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Uma vez que $f(x, y) = 0$ se, e somente se, $P(x, y) = 0$, sem perda de generalidade, podemos assumir que $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$.

O primeiro caso a ser tratado corresponde a polinômios quase-homogêneos.

Definição. Um polinômio $p(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j \in \mathbb{C}[x, y]$ é *quase-homogêneo* se existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $i, j \in \mathbb{N}$ e $a_{ij}(x) \neq 0$, temos

$$i\alpha + j\beta = \gamma.$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Seja $f(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$ uma série de potências não invertível. Por meio de mudanças de coordenadas, o que não afeta a descrição de suas soluções, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f(0, y) = y^m \cdot u(y)$, em que $u(0) \neq 0$ e $\text{mult}(f) = m > 0$ e consequentemente, pelo Teorema de Weierstrass, podemos nos restringir ao caso em que $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$.

O método de Newton consiste, em cada etapa, considerar o polígono de Newton de $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ e para cada face compacta desse polígono consideramos um polinômio quase-homogêneo $p(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j \in \mathbb{C}[x, y]$ associado para obter aproximações da solução de $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

Desse modo, apresentamos o Método de Newton sob a forma do seguinte algoritmo:

1. Determine o Polígono de Newton de $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ e para cada face compacta, determinamos um polinômio quase-homogêneo associado.
2. Para o polinômio quase-homogêneo, determinamos sua solução (que é uma aproximação da solução de $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$) em termos da inclinação do lado do polígono de Newton fixado.

3. Substituindo a solução obtida para o polinômio quase-homogêneo em $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$, obtemos uma nova série de potências $f_1(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$.
4. Considerando f_1 , recomeçamos o processo, ou seja, determinamos seu Polígono de Newton e um novo polinômio quase-homogêneo associado a um dos lados compactos.
5. Procedemos recursivamente até chegarmos a uma solução nula ou a uma aproximação desejada.

CONCLUSÕES

Dada uma série de potências formal $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$, por meio do seu polígono de Newton associado, podemos obter aproximações para uma solução $y[[x^{\frac{1}{n}}]] \in \mathbb{C}[[x^{\frac{1}{n}}]]$ da equação $f(x, y) = 0$. No caso particular, em que a série de potências é um polinômio quase-homogêneo, o método fornece uma solução precisa para a equação. Tal solução é uma parametrização para a curva definida pela equação. Assim, temos um modo de determinar uma parametrização da curva a partir da equação implícita que a define.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Universidade Estadual de Maringá por meio do Programa de Iniciação Científica – PIC e ao Programa de Educação Tutorial em Matemática – PET – Matemática -UEM.

REFERÊNCIAS

- BRIESKORN, E.; KNORRER, H. **Plane Algebraic Curves**. Springer Basel, 1986.
- CASAS-ALVERO, E. **Singularities of Plane Curves**. Cambridge University Press, 2000.
- HEFEZ, A. Irreducible Plane Curve Singularities. In: Mond, D. *et al.* **Real and Complex Singularities**. 1. ed. CRC Press, 2003. p. 1-120.
- HIRSCHFELD, J. W.P.; KORCHMAROS, G.; TORRES, F. **Algebraic Curves over a Finite Field**. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, 2008.
- RUIZ, J. M. **The Basic Theory of Power Series**. Advanced Lectures in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.
- WALL, C. T. C. **A Singular Points of Plane Curves**. London Mathematical Society. Student Texts 63, Cambridge University Press, 2004.