

RELAÇÕES ENTRE AS RAÍZES DE UM POLINÔMIO E DE SUA DERIVADA – TEOREMA DE MARDEN

Murilo Perini (PIC/UEM), Pablo Henrique Zulin (PIC/UEM), Maria Elenice Rodrigues
Hernandes (Orientadora). E-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática, Álgebra/Geometria Algébrica

Palavras-chave: Polinômios; Teorema de Gauss-Lucas; Teorema de Marden.

RESUMO

O presente trabalho pretende explorar o Teorema de Marden, o qual estabelece uma relação entre as posições relativas das raízes de uma função polinomial complexa e de sua derivada, evidenciando diversos conceitos e resultados apresentados no curso de graduação em matemática. A metodologia adotada foi o estudo e discussão de livros e artigos científicos relacionados ao tema. Primeiramente construiu-se uma base de fundamentos necessários do Cálculo Diferencial, Geometria Euclidiana, Geometria Analítica e Álgebra, como os conceitos de derivada de uma função, distância entre dois pontos do plano e semelhança de triângulos, assim como noções básicas sobre os números complexos e funções polinomiais complexas, Teorema Fundamental da Álgebra, dentre outros. Por fim, provou-se o Teorema de Marden. Posteriormente, vimos uma generalização desse último teorema, em que os pontos críticos de um polinômio podem ser localizados no plano através do Teorema de Gauss-Lucas. A importância do Teorema de Marden é que ele fornece uma descrição mais específica para as raízes de um polinômio de grau três. Esta relação entre as raízes da derivada de um polinômio e os focos da elipse de Steiner tem grande relevância do ponto de vista físico para a determinação de pontos de equilíbrio em campos de potenciais.

INTRODUÇÃO

O Teorema de Marden é um resultado elegante o qual afirma que dado um polinômio complexo de grau três, cujas raízes são não colineares no plano complexo, então existe uma única elipse, inscrita no triângulo cujos vértices são as raízes do polinômio, que tangencia os três lados deste triângulo em seus pontos médios. Mais ainda, os focos desta elipse são as raízes da derivada do polinômio. O objetivo deste trabalho foi demonstrar este resultado. Para isso, utilizou-se de artigos sobre o tema e seminários para estabelecer uma base sólida de pré-requisitos para demonstrar o teorema, como a dissertação de mestrado de SANTOS (2014). Em MAMEDE (2023) vimos uma generalização do Teorema de Marden, o chamado Teorema de Gauss-Lucas. Esse resultado garante que os pontos críticos de um polinômio não constante p pertencem à envoltória convexa das raízes de p .

REVISÃO DE LITERATURA

Por ser um projeto de iniciação científica em matemática, utilizou-se majoritariamente de uma metodologia de pesquisa de materiais bibliográficos relacionados ao tema central do estudo. A referência SIEBECK (1864) foi a primeira prova do teorema publicada, abordando conceitos da análise complexa e da geometria analítica no plano complexo. Esta foi profundamente estudada por Marden, que em MARDEN (1945) publicou o estudo sobre os zeros de funções, e mais tarde, sua prova do teorema em MARDEN (1966). Kalman também publicou uma demonstração do teorema, dita mais moderna, em KALMAN (2008). SANTOS (2014) apresenta uma prova do Teorema de Marden e em MAMEDE (2023) é apresentado o teorema de Gauss-Lucas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste projeto, foram estudados conceitos e resultados do Cálculo Diferencial, Geometria Euclidiana, Geometria Analítica e Álgebra. O Teorema Fundamental da Álgebra garante a existência de raízes complexas de funções polinomiais com coeficientes complexos, que foi essencial para o estudo das funções polinomiais. O tema de funções complexas foi abordado, assim como limite e continuidade dessas funções. Foram dadas propriedades de limites, envolvendo o limite da soma de funções, da multiplicação de funções, da multiplicação de uma função por escalar, entre outras. O tópico seguinte foram as derivadas de funções complexas. Foi estabelecida uma relação entre continuidade e diferenciabilidade, ou seja, se uma função complexa for diferenciável em um certo ponto, então ela será contínua neste ponto. Ainda neste tópico, provamos as Condições de Cauchy-Riemann, que relacionam derivadas parciais das funções que compõem a parte imaginária e real de uma certa função complexa. Com essas condições, foi possível analisar a diferenciabilidade de uma função em algum ponto de seu domínio. As funções holomorfas também foram exploradas, com uma conexão direta com as Condições de Cauchy-Riemann, pois, se uma função for holomorfa em determinado ponto de seu domínio, então ela é diferenciável do ponto de vista real neste ponto, e que as partes reais e imaginárias de f irão satisfazer as condições de Cauchy-Riemann. A implicação inversa também será verdade. Como último tópico no assunto de funções complexas, foram vistas as funções exponenciais, suas derivadas e propriedades, onde este tipo de função é definida por $e^z = e^x[\cos(y) + i.\sen(y)]$ com $z = x + yi$ um número complexo. Para a demonstração do Teorema de Marden, também foram estudadas algumas propriedades de congruência de triângulos. Em especial, os casos “Lado-Ângulo-Lado” (tratado como axioma), o caso “Ângulo-Lado-Ângulo” e o caso “Lado-Lado-Lado”, que apresentam uma relação correspondência entre lados e ângulos de dois triângulos para demonstrar sua congruência. Também foi estudada a localização de raízes complexas por meio do Teorema de Gauss-Lucas. Por fim, foi demonstrado o Teorema de Marden, e, para isso, foram usados três lemas que tratavam de ângulos dentro de uma elipse para construir o triângulo cujos vértices

eram as raízes do polinômio, e da tangenciabilidade da elipse a esse triângulo nos pontos médios de seus lados, primeiro demonstrando que, caso essa elipse passe pelo ponto médio, então ela é tangente e em seguida, que se essa elipse é tangente a um dos lados, também é tangente aos demais. Com os resultados, é possível demonstrar o Teorema de Marden.

CONCLUSÕES

Conclui-se, com esse trabalho, que é possível relacionar duas ou mais áreas da matemática para construir teoremas, e que a visualização de um resultado geometricamente ajuda na sua compreensão algébrica. Estudar e entender um teorema como o que foi apresentado abre portas para uma compreensão mais profunda da matemática, além de familiarizar os alunos com conteúdos que já farão parte da sua trajetória como matemáticos e enriquecer toda a teoria já conhecida. O Teorema de Marden se mostra um tópico interessante, não apenas pela sua beleza, mas pela sua complexidade delicada e sua capacidade de expandir conceitos matemáticos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandez, pela orientação excepcional e paciência, à UEM, pela disponibilidade das salas de estudo com ar-condicionado, e um ao outro, pelo companheirismo, amizade e conhecimento que compartilhamos durante o trabalho. Agradecemos também a todos os professores do departamento pelos ensinamentos e pela paixão desta maravilha que chamamos de matemática.

REFERÊNCIAS

KALMAN, D., **An elementary proof of Marden's theorem**. The American Mathematical Monthly, MAA, 115, no 4, 2008, 330-338.

MAMEDE, Ricardo. **O Teorema de Gauss-Lucas**. Gazeta de Matemática, n. 199, p.15-20, 2023.

MARDEN, M., **A note on the zeros of the sections of a partial fraction**. Bull. Amer. Math. Soc. 51, 1945, 935-940.

MARDEN, M., **Geometry of polynomials**. Math. Surveys no. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1966.

SANTOS, M. J. S., **Teorema de Marden**. Dissertação de mestrado. Goiânia - GO, PROFMAT, UFG, 2014, 62p.

34º Encontro Anual de Iniciação Científica
14º Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior



12 e 13 de novembro de 2025

SIEBECK, J., **Ueber eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte.**
J. Reine Angew. Math., 64, 1864, 175-182.