

Estudo das estruturas algébricas dos tensores e suas representações diagramáticas aplicado às teorias de campos

Nicolas da Silva Fernandes (PIC), Miguel Jorge Bernabe Ferreira (Orientador). E-mail: ra128673@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Física, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Física, Métodos Matemáticos da Física.

Palavras-chave: Estruturas Algébricas, Tensores, Teoria de Campos.

RESUMO

Neste trabalho estudamos detalhadamente o que são tensores a partir de uma abordagem em suas estruturas algébricas, tratando tensores como elementos de espaços vetoriais munidos de uma estrutura algébrica. O enfoque abstrato visa possibilitar generalizações e aplicações do cálculo tensorial em diversas áreas. Neste trabalho, apresentamos também uma maneira diagramática de representar os tensores, e assim alguns exemplos de teorias de campos são apresentadas, como a formulação tensorial do eletromagnetismo clássico, e da relatividade restrita, destacando essas formulações e sua coerência com os limites clássicos conhecidos.

INTRODUÇÃO

O estudo de tensores é uma ferramenta fundamental no formalismo de muitas teorias físicas, especialmente nas teorias de campos. Neste trabalho, a proposta foi revisar a definição de espaços vetoriais, construindo a ideia de como certas grandezas necessitam apenas de um escalar para representar, enquanto outras precisam de um escalar e uma direção, que são os vetores e grandezas que precisam de mais informações são chamadas de tensores. A partir dessa ideia construir uma visão geral de um tensor. E por fim, analisar operações tensoriais, de modo a aplicá-las ao estudo de teorias de campos. Como principais referências, utilizou-se *Uma Breve Introdução ao Cálculo Tensorial na Física* (BERNABE, 2020) e *The Classical Theory of Fields* (LANDAU; LIFSHITZ, 1994).

REVISÃO E LITERATURA

O presente trabalho teve caráter exclusivamente teórico, não envolvendo experimentação em laboratório. Os materiais utilizados foram os usuais no

desenvolvimento de pesquisas em física teórica, tais como salas de seminário, lousa, giz, marcadores, papel, computador, impressora e livros de referência.

Os métodos empregados consistiram principalmente em exposições e discussões entre o aluno e o orientador, realizadas por meio de seminários e apresentações em quadro. Além disso, foram conduzidas revisões bibliográficas sistemáticas em livros e artigos científicos, com o objetivo de fundamentar e ampliar a compreensão dos temas estudados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O primeiro tema a ser estudado foi a respeito de espaços vetoriais, foi introduzido as notações de vetores usualmente utilizadas na mecânica quântica e, também, a apresentação do espaço vetorial dual, explorando suas diferenças em relação aos vetores de um espaço vetorial. Foi mostrado como os elementos desse espaço dual são funcionais lineares e como podem ser utilizados para a definição do produto escalar entre vetores. A partir disso, apresentou-se a forma de escrever vetores como combinações lineares, o que levou à necessidade de definir operações entre essas combinações.

A partir dessa ideia, discutiu-se a introdução do conceito de tensor. Uma interpretação desenvolvida pelo aluno descreve um tensor como um “operador multilinear entre vetores”. Assim, sempre que se fizer necessária a realização de operações entre combinações de vetores, ou entre vetores que resultem em algo que as operações vetoriais conhecidas — como as apresentadas em *Mathematical Methods for Physicists* (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2012) não conseguem satisfazer, os tensores entram em ação. Eles não apenas abrangem operações mais complexas, mas também englobam as operações básicas; dessa forma, um vetor é um tipo de tensor, mas nem todo tensor é um vetor. Com isso o tensor introduz um conceito mais amplo e geral.

Outra abordagem utilizada para introduzir o conceito de tensor foi por meio de um problema de mecânica clássica, apresentado em *Mechanics* (SYMON, 1953), que trata do cálculo do momento angular de um corpo rígido. A ideia era representar o momento angular separando a parte dependente do vetor posição, do vetor velocidade angular, porém isso resulta em uma operação entre dois vetores que resulta em um outro vetor, essa operação não corresponde a um produto escalar usual. Surge, então, a necessidade de um tensor que realize essa operação e resulte em um vetor. Esse tensor é conhecido como tensor de inércia e constitui um bom exemplo introdutório, pois pode ser escrito na forma de matriz. Esse fato leva a um resultado importante: os tensores podem ser representados por matrizes, embora nem toda matriz seja um tensor. A partir disso, foi apresentada a forma de um vetor e seu dual, em notação matricial.

Nesse ponto, tornou-se necessário nomear e classificar certos tensores, visto que eles podem representar escalares, vetores, matrizes, entre outros. Conforme definido em *Vector and Tensor Calculus* (MIRANDA, 2011), o *rank* de um tensor pode variar de 0, 1, 2 até valores superiores, sendo escalares de *rank* 0, vetores de *rank* 1, matrizes de *rank* 2 e assim sucessivamente, o que permite diferenciar mais claramente o tipo de tensor com que se está trabalhando.

Outro resultado importante discutido foi o comportamento dos tensores sob mudanças de base. Observou-se que, para vetores do espaço vetorial, os coeficientes que acompanham os vetores da base se transformam pela matriz de transformação inversa, enquanto que, para vetores do espaço dual, esses coeficientes se transformam pela matriz de mudança de base direta. Assim, definiram-se duas novas classificações vetores contravariantes, que se transformam pela matriz de mudança de base inversa e possuem índices superiores, e vetores covariantes, que se transformam pela matriz de mudança de base direta e possuem índices inferiores. A escolha da posição dos índices adotada neste trabalho difere daquela apresentada em *Uma Breve Introdução ao Cálculo Tensorial na Física* (BERNABÉ, 2020), mas tal escolha é arbitrária, sendo apenas necessário manter a consistência para evitar confusões.

A partir disso, todos os tipos de tensores puderam ser classificados, com múltiplos índices contravariantes e/ou covariantes determinando o *rank* do tensor. Cada índice pode ser interpretado como uma matriz coluna (para contravariantes) ou uma matriz linha (para covariantes). Essa estrutura permite descrever inúmeras operações e indexações. Diante de operações que envolvem muitos índices e somatórios, introduziu-se a notação de Einstein para índices repetidos, seguindo a apresentação de *Uma Breve Introdução ao Cálculo Tensorial na Física* (BERNABÉ, 2020).

Também foram exploradas representações diagramáticas dos tensores, onde um tensor contravariante é representado por uma seta entrando em um objeto e um tensor covariante por uma seta saindo, ideia inspirada nos diagramas de Kuperberg (BERNABÉ, 2016, p. 148). Com essa base, passou-se à construção de tensores importantes para a definição de operações entre tensores, incluindo o tensor de Levi-Civita e o tensor métrico, além de discutir a representação de vetores sobre variedades em coordenadas curvilíneas e o uso da contração de índices. Todo esse arcabouço foi direcionado para a introdução da teoria de campos.

Primeiramente, revisitou-se a teoria da relatividade especial, utilizando o invariante espaço-tempo para chegar à métrica de Minkowski. A partir desse tensor métrico e das transformações dos tensores contravariantes, foram obtidas as transformações de Lorentz, conforme *The Classical Theory of Fields* (LANDAU; LIFSHITZ, 1994), resultado físico amplamente conhecido. Mostrou-se ainda como essas transformações se manifestam no diagrama espaço-tempo, levando à interpretação de rotações hiperbólicas nesse espaço. Por fim, utilizou-se essa mesma estrutura tensorial para explorar a invariância de tensores e as contrações de índices,

culminando na construção do tensor eletromagnético, cuja formulação leva diretamente às equações de Maxwell na forma tensorial.

CONCLUSÕES

O trabalho percorreu um caminho que começou com a revisão de conceitos fundamentais de espaços vetoriais e seu espaço dual, avançou para a definição e classificação de tensores, suas representações matriciais, comportamentos sob mudanças de base e formas diagramáticas, e culminou na aplicação desses conceitos à teorias de campos. Essa trajetória permitiu compreender a relevância física dos tensores na descrição de fenômenos fundamentais, como as transformações de Lorentz e a formulação das equações de Maxwell na forma tensorial.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Universidade Estadual de Maringá e ao Departamento de Física pela oportunidade de estudar e aprender mais sobre as áreas de Física teórica. Agradeço em especial, ao orientador Miguel Jorge Bernabe Ferreira pelo auxílio na jornada.

REFERÊNCIAS

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical Methods for Physicists*. 7. ed. Elsevier, 2012.

BERNABE, M. J. *Teorias de gauge e modelos topológicos (anyons e ordem topológica)*. 2016. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

BERNABE, M. J. *Uma Breve Introdução ao Cálculo Tensorial na Física*. Departamento de Física, UEM, 2020.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*. 4. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1994. (Course of Theoretical Physics; v. 2).

MIRANDA, D. *Vector and Tensor Calculus*. Versão 0.76, 2018. Disponível sob a GNU Free Documentation License.

SYMON, K. R. *Mechanics*. Addison-Wesley, 1953.