

QUADRADOS LATINOS E APLICAÇÕES

Mateus Barbosa Kopp Webber (PIC/UEM), Pedro Ricardo Pereira Melo (PIC/UEM),
Emerson Luiz do Monte Carmelo (Orientador). E-mail: elmcarcelo@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Maringá,
PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Matemática Discreta e Combinatória.

Palavras-chave: Quasegrupo; Quadrados latinos ortogonais; Geometrias finitas.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar quadrados latinos e suas conexões com outras estruturas discretas. Para tal, algumas estruturas algébricas e combinatórias serão vistas. O intuito é apresentar uma visão interdisciplinar sobre o tópico, apresentando conexões entre teoria dos números, álgebra, combinatória e geometrias finitas. Certa classe de códigos corretores de erros também pode ser construída via quadrados latinos.

INTRODUÇÃO

Em 1782, o célebre Leonhard Euler investigou o intrigante problema: “Suponha que cada um de seis regimentos tenha exatamente um oficial de cada patente, dentre um conjunto de seis patentes. É possível alinhar os 36 oficiais numa formação quadrada (seis linhas e seis colunas) de tal modo que em cada linha e em cada coluna tenha exatamente um oficial de cada patente e de cada regimento?”

Este problema ficou conhecido como o “problema dos 36 oficiais” e permaneceu em aberto por quase 120 anos. Em 1900, o matemático Tarry analisou, sem auxílio de computadores, as possibilidades de distribuição dos oficiais e mostrou que o problema não admitia solução.

Tal problema pode ser modelado por meio de um objeto matemático conhecido como quadrado latino.

Motivado pelo problema dos 36 oficiais, foi criado o jogo recreativo Sudoku, que consiste em preencher um quadrado latino de ordem 9 com valores de 1 até 9 e tendo a condição adicional de que cada um dos 9 subquadrados 3x3 tenha também os números de 1 a 9. Tal jogo popularizou o quadrado latino.

Embora seja um problema de natureza combinatória, o problema dos 36 oficiais pode ser estendido a um problema de construção de dois quadrados latinos com certa propriedade, os chamados quadrados latinos ortogonais.

O projeto objetiva estudar quadrados latinos, quadrados latinos ortogonais e algumas conexões importantes com outras estruturas discretas.

MATERIAIS E MÉTODOS

Para a construção de quadrados latinos ortogonais, são empregadas diversas estruturas algébricas tais como grupos, corpos finitos, álgebra linear, além de ferramentas oriundas da teoria dos números. Seguem abaixo alguns conceitos fundamentais do projeto.

Definição 1: Seja X um conjunto não vazio com n elementos, um *quadrado latino de ordem* n é uma matriz n por n tal que todas as linhas e colunas formam permutações de X .

Exemplo 2: Um quadrado latino de ordem 3 com símbolos em $X = \{1,2,3\}$ segue abaixo

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Definição 3: Sejam L e M quadrados latinos de ordem n com elementos em X . Dizemos que L e M são *ortogonais* se para todo par (x,y) com entradas em X , existe um único par (i,j) tal que $L(i,j)=x$ e $M(i,j)=y$. Denotamos por $N(n)$ o número máximo de quadrados latinos ortogonais de ordem n .

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Quadrado latino também pode ser visto como uma estrutura algébrica chamada quasegrupo e essa estrutura exige menos propriedades que o conceito de grupo.

Definição 4: Seja X um conjunto não vazio munido de uma operação binária $*$. Diremos que o par $(X,*)$ é um *quasegrupo* se a operação $*$ satisfaz as condições: para todos a,b em X , existem únicos x,y em X tais que $a * x = b$ e $y * a = b$.

Proposição 5: $(X,*)$ é um quasegrupo se, e somente se, sua tabela de operação é um quadrado latino.

Através do uso de operações algébricas, conseguimos definir e classificar diferentes tipos de quadrados latinos de acordo com suas propriedades como idempotência e simetria.

Sobre quadrados latinos ortogonais, Tarry mostrou que $N(6)=1$. Tais números não crescem muito, conforme o resultado abaixo

Teorema 6: Para todo n , $N(n)$ é no máximo $n-1$.

Usando propriedade de corpos finitos, é possível provar que a cota superior é atingida para uma determinada classe

Teorema 7: Para toda potência de primo q , $N(q)=q-1$.

Há inúmeras estimativas sobre os números $N(n)$, mas a sua determinação tem desafiado a comunidade científica por mais de 200 anos.

Além das estruturas algébricas empregadas, uma surpreendente aplicação de quadrados latinos ortogonais reside na relação com geometrias finitas, como o plano afim.

Definição 8: Uma geometria consiste em um par ordenado $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ em que $\mathcal{P}$ é um conjunto cujos elementos são chamados de *pontos* e uma família $\mathcal{L}$ de subconjuntos de $\mathcal{P}$, cujos elementos serão chamados de *retas*, em que $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ satisfaz certos axiomas e condições desejadas.

Com isso conseguimos definir a uma geometria particular chamada de plano afim, rica em propriedades e que podemos relacionar com quadrados latinos.

Definição 9: Um espaço $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ é um *plano afim* se satisfaz certos axiomas

- A1) Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa por eles;
- A2) Dado um ponto P e uma reta r que não passa por esse ponto, então existe uma única reta s paralela a r e que contém esse ponto P ;
- A3) Existência de um quadrângulo, isto é, um subconjunto de 4 pontos de $\mathcal{P}$ que são 3 a 3 não colineares.

A análise dessas geometrias nos permitiu entender como os quadrados latinos podem ser representados visualmente, revelando padrões interessantes que estão em conformidade com as simetrias e as propriedades desses espaços geométricos. Em particular, vimos como a construção de quadrados latinos pode ser modelada no contexto de geometria finita, com a correspondência entre elementos do quadrado e pontos ou linhas em planos afins ou projetivos, fornecendo uma nova perspectiva sobre sua estrutura.

Teorema 10: Existe um plano afim de ordem n se, e somente se, existe um conjunto com $n-1$ quadrados latinos ortogonais de ordem n , isto é, $N(n)=n-1$.

Por fim, o estudo de quadrados latinos não apenas amplia nosso entendimento das estruturas algébricas e combinatórias, mas também abre caminho para novas aplicações em áreas práticas, como a construção de códigos eficientes para sistemas de comunicação como, por exemplo, códigos com distância de separação máxima (MDS) que podem ser construídos via quadrados latinos.

Teorema 11: Se $N(n)=s$, então existem um código MDS com n^2 palavras sobre um alfabeto com n símbolos e comprimento $s+2$.

CONCLUSÕES

Do ponto de vista prático, quadrados latinos têm sido aplicados em diversas áreas: análise de experimentos em Estatística, construção de códigos corretores de erros na transmissão de informações, teste de eficiência de produtos, entre outros. Já do ponto de vista teórico, a pesquisa sobre quadrados latinos representa um tema central na Matemática Discreta devido as inúmeras conexões com outros conceitos matemáticos. Os resultados estudados nesta pesquisa evidenciam a riqueza das interações entre álgebra, combinatória, geometria e teoria dos códigos.

AGRADECIMENTOS

Nossos agradecimentos aos professores e colegas do PET-Matemática e a todos aqueles que contribuíram para a realização deste projeto, incluindo o suporte financeiro da CAPES e suporte da PPG/UEM.

REFERÊNCIAS

EVANS, A. B., **Orthogonal Latin Squares Based on Groups**, Springer, (2018).

LINDNER, C. C. e RODGER, C. A., **Design Theory**, CRC, Auburn University, 1997

MONTE CARMELO, E. L., **Configurações Combinatórias**, Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática, 2019.

STINSON, D., **Combinatorial Designs: Constructions and analysis**, Springer, New York, 2004.