

PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO EM GEOMETRIA

Lucas Mendes Fabre (PIC), Ryuichi Fukuoka (Orientador). E-mail: rfukuoka@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Maringá,
PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Geometria Diferencial

Palavras-chave: Cálculo Variacional; equações de Euler-Lagrange; métricas Riemmanianas; geodésica; métricas Riemmanianas dependentes do tempo.

RESUMO

Este projeto destina-se ao estudo do cálculo variacional e sua aplicação no estudo de problemas de minimização de comprimento de curvas em abertos $\mathbb{R}^n$ munidos com uma métrica Riemmaniana.

O principal objeto que pretendemos estudar nesse projeto é a equação das geodésicas em abertos M de $\mathbb{R}^n$ munidos de uma métrica Riemmaniana. O problema das geodésicas se relaciona diretamente com o problema de determinar a curva de menor comprimento que conecta dois pontos. Estudamos também alguns casos simples de métricas Riemmanianas que variam com o tempo.

INTRODUÇÃO

O cálculo variacional é uma ferramenta matemática usada para resolver problemas de minimização. Ele pode ser usado para determinar curvas que minimizam certas grandezas, como comprimento, área ou velocidade em condições específicas. Um de seus principais usos na geometria diferencial e na física é para a determinação de geodésicas: as curvas que representam o caminho mais curto entre dois pontos em um espaço com uma métrica definida. Ao aplicar o cálculo variacional para encontrar geodésicas, busca-se a curva que minimiza o funcional comprimento de arco ou o funcional energia entre dois pontos fixos. Essa abordagem é feita através das equações de Euler-Lagrange, cuja solução caracteriza as geodésicas do espaço em questão. Daremos exemplos clássicos, sem apresentar todos os detalhes técnicos, de problemas que motivaram o desenvolvimento do cálculo variacional, também usaremos as equações de Euler-Lagrange para determinar as geodésicas do plano hiperbólico e da superfície de uma esfera e por fim usaremos tanto o cálculo variacional quando um pequeno conjunto de técnicas da análise matemática para estudar as geodésicas de espaços cuja métrica varia com o tempo.

MATERIAIS E MÉTODOS

Sejam M um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : [a, b] \times M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação não negativa, onde $F(t, x, \bullet) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma norma para todo $(t, x) \in [a, b] \times M$. Fixe dois pontos $p_1, p_2 \in M$. Estamos em determinar uma curva continuamente diferenciável por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ que minimize o funcional

$$J(\gamma) = \int_a^b F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt \quad (1.1)$$

dentre as curvas que satisfazem $\gamma(a) = p_1$ e $\gamma(b) = p_2$, onde $\dot{\gamma}(t)$ é a derivada de γ com respeito a t . As condições sobre os pontos inicial e final de γ são chamadas de condições de contorno. Por exemplo, no problema de encontrar a curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com comprimento mínimo se reduz ao problema de minimizar o funcional (1.1), onde

$$F(t, x, y) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}. \quad (1.2)$$

Assumamos agora que F^2 seja de classe C^2 e do tipo $F(x, y)$, ou seja, não dependa explicitamente de t . Vamos assumir que γ seja uma solução de classe C^1 do problema de minimização (1.1) satisfazendo as condições de contorno estabelecidas. Seja $\gamma_s : [a, b] \rightarrow M$ uma variação de γ , ou seja, uma família de curvas parametrizadas por s tal que:

- $\gamma_0 = \gamma$;
- $\gamma_s(a) = p_1, \gamma_s(b) = p_2$ para todo s ;
- γ_s “varia diferenciavelmente” em relação a s .

Consideramos o funcional (1.1) como uma função $J(s) := J(\gamma_s)$. Se γ minimiza ou maximiza J dentre as curvas de classe C^1 que satisfazem as condições de contorno, então devemos ter $(d/ds)J(0) = 0$, e esta equação resulta num sistema de equações diferenciais ordinárias, chamadas de equações de Euler-Lagrange, que são dadas por

$$F_{x_i}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \frac{\partial}{\partial t} F_{y_i}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

onde F_{x_i} e F_{y_i} são as derivadas de F em relação a x_i e y_i , respectivamente.

Cabe recordar aqui que as curvas minimizantes e as geodésicas tem o mesmo traço, mas as geodésicas são sempre parametrizadas por comprimento de arco. O funcional energia é dado por

$$J[\gamma] = \int_a^b F^2(t, \gamma(y), \dot{\gamma}(t)) dt \quad (1.3)$$

e as geodésicas são pontos críticos do funcional energia.

Estudaremos o problema de curva minimizante e geodésica em diversos espaços clássicos. O primeiro deles é o $\mathbb{R}^n$, cujo funcional F está descrito em (1.2). O caso

$$S^n = \{R^{n+1}; \|x\| = 1\}$$

será estudado junto com o caso das superfícies rotacionalmente simétricas. Diferentemente do que é feito em cursos clássicos de geometria diferencial de superfícies, estudaremos o problema de geodésicas sem nos referirmos ao espaço ambiente. O espaço hiperbólico H^n será representado como

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_n > 0\}$$

munido do funcional energia obtido ao substituir, em (1.3),

$$F^2(x, y) = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}{x_n^2}.$$

Por fim, estudaremos mais alguns casos de espaços euclidianos e hiperbólicos com a métrica Riemanniana sujeita a dilatações e contrações.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através do cálculo de variações, deduzimos as equações de Euler-Lagrange, que são usadas para determinar os extremos de funcionais. Com elas, caracterizamos as geodésicas do plano hiperbólico e também da esfera. Por fim, usamos as técnicas anteriores para estudarmos as geodésicas de um espaço cuja métrica varia com o tempo.

CONCLUSÕES

Estudamos os conceitos elementares do cálculo de variações e mostramos como ele pode ser usado para resolver problemas de minimização. Em particular, usamos as equações de Euler-Lagrange para estudar as geodésicas do plano hiperbólico e da esfera. Vimos também que a solução do problema de minimização do funcional energia no caso de métricas Riemannianas que variam com o tempo não são

parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco. Seria interessante estudar outras propriedades das soluções desse problema.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a UEM e ao meu orientador Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka pela oportunidade de poder participar desse projeto e aprender coisas novas.

REFERÊNCIAS

GELFAND, I. M.; FORMIN, S. V. **Calculus of Variations**. Prentice-Hall, Inc., MR160139, 1963.

DO CARMO, M. P., **Riemmanian Geometry**. Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., 1992

LIMA, E. L., **Curso de Análise, Vol. 2**, IMPA, 1992

LIMA, E. L., **Espaços Métricos**, IMPA, 2020

COELHO, F. U., **Um Curso de Álgebra Linear**, EDUSP, São Paulo, 2020

DO CARMO, M. P., **Differential geometry of curves and surfaces**. Prentice-Hall, Inc., 1976.