

INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

Cauã Rodrigo Maram Souza (PIC/UEM), Patrícia Hilário Tacuri Córdova
(Orientadora). E-mail: phtcordova2@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra / Matemática.

Palavras-chave: Integral de Riemann; generalização; probabilidade.

RESUMO

Neste estudo, revisamos as definições e teoremas fundamentais da teoria da Integral de Riemann, a fim de introduzir uma generalização chamada Integral de Riemann-Stieltjes, juntamente com suas características. Apresentaremos algumas aplicações, incluindo o estudo de variáveis aleatórias no âmbito da probabilidade.

INTRODUÇÃO

Este projeto expõe a definição da integral de Riemann-Stieltjes, uma das primeiras generalizações da integral de Riemann. Essa integral foi introduzida em 1894 no trabalho de Thomas Joannes Stieltjes, um matemático holandês que teve um papel importante no avanço e na difusão do Cálculo.

Primeiramente, estudamos e relembramos alguns conceitos fundamentais da análise da reta, a definição da integral de Riemann e os requisitos para que uma função seja integrável à Riemann, os quais devem ser entendidos antes de estudarmos a integral de Riemann-Stieltjes.

Depois, introduzimos a integral de Riemann-Stieltjes, suas propriedades e condições de existência, bem como sua aplicação por meio de exemplos. Por último, apresentamos algumas aplicações da Teoria das Probabilidades, focando no cálculo do valor de uma variável aleatória e nas funções de distribuição de probabilidade cumulativa.

MATERIAIS E MÉTODOS

Estudos individuais dos tópicos do programa por parte do aluno; Participação do aluno em seminários periódicos com a orientadora para que o mesmo exponha os resultados obtidos e esclareça suas possíveis dúvidas; Aprendizagem e utilização da linguagem LaTeX para a preparação de relatórios em nível de editoração internacional.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Definiremos a seguir as primeiras ideias a serem consideradas para a definição da Integral de Riemann-Stieltjes.

Definição. Seja α uma função não-decrescente em $[a,b]$. Para cada partição $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de $[a,b]$, escrevemos

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Seja $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada qualquer e P uma partição de $[a,b]$ qualquer. Definimos:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

ou seja, é o ínfimo do conjunto imagem da função f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, e

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

que é o supremo do conjunto imagem de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Então a **soma inferior** de f para P com relação a α é definida por

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i$$

e a **soma superior** de f para P com relação a α é definida por

$$S(f, P, \alpha) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i$$

Definição. A **integral inferior** da função real limitada f em $[a,b]$ com relação a α é dada por

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sup\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é qualquer partição de } [a, b]\}$$

e a **integral superior** da função real limitada f em $[a,b]$ com relação a α é dada por

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \inf\{S(f, P, \alpha) : P \text{ é qualquer partição de } [a, b]\}$$

A integral inferior e superior com relação a α , de uma função real limitada f , não são necessariamente iguais. Caso ocorra a igualdade, então dizemos que a função f é Stieltjes integrável com relação a α .

Definição. Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não-decrescente. f é dita **Riemann-Stieltjes integrável com respeito a α em $[a, b]$** se

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

no qual denotamos o valor comum por:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

ou

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

Esta é a integral de Riemann-Stieltjes de f com respeito a α na partição P de $[a, b]$.

Teorema. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real limitada em $[a, b]$, de modo que f seja Riemann-Stieltjes integrável em $[a, b]$ se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma partição P tal que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon.$$

As demais definições, resultados e exemplos, assim como a aplicação na área da Estatística podem ser encontradas em meu Projeto de Iniciação Científica.

CONCLUSÕES

A partir deste projeto de iniciação científica, ressalto a relevância das matérias estudadas durante a graduação para o aprofundamento em teorias mais complexas, como ocorreu neste caso.

Ademais, observamos a importância do estudo da integral de Riemann-Stieltjes, uma vez que ela generaliza a integral de Riemann. É notável que muitos teoremas e resultados aplicáveis à integral de Riemann permanecem válidos para a integral de Riemann-Stieltjes. No entanto, também existem resultados específicos para esta última integral.

Por último, constato a relevância desta integral para várias aplicações, como a apresentada no projeto de iniciação científica, na teoria das probabilidades.

REFERÊNCIAS

LEITE, T. et al. **A integral de riemann-stieltjes**. 2017.

LIMA, E. L. **Análise real**: vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

MANÇO, R. d. F. **Integrais e aplicações**. 2016. PhD Thesis – Faculdade de Letras, Universidade de São Paulo, 2016.