# UM MÉTODO EXATO PARA O PROBLEMA DE PICK AND DELIVERY

Pedro Henrique Fernandes Ribeiro (PIBIC/CNPq), Francisco Nogueira Calmon Sobral (Orientador). E-mail: fncsobral@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

**Área e subárea do conhecimento: Matemática/Matemática Aplicada**

**Palavras-chave:** Otimização; Problema de alocação de tarefas; Programação linear inteira mista.

## RESUMO

O Problema de Alocação de Tarefas é um problema combinatório clássico de otimização, amplamente utilizado para modelar situações reais de logística. Nesse problema, o número de variáveis independentes pode crescer significativamente, tornando sua resolução por métodos tradicionais computacionalmente custosa. Neste trabalho é aplicada a técnica de Branch and Price, combinada com o método de geração de colunas baseado no Problema do Caminho Mínimo Elementar com Restrições de Recursos (do inglês Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints – ESPPRC) adaptado ao problema de alocação de tarefas com janelas de tempo. Essa abordagem permite decompô-lo em um problema mestre, resolvido de forma relaxada e aproximada por programação linear, e em subproblemas auxiliares, que indicam formas de ajustar o problema mestre.

## INTRODUÇÃO

O Problema de Alocação de Tarefas é um problema combinatório de otimização aplicado a situações de planejamento e logística. Neste trabalho, considera-se como objetivo do problema e, consequentemente, como objetivo do estudo, determinar como um conjunto de tarefas pode ser distribuído entre uma frota de veículos, buscando realizar o maior número possível de tarefas dentro de um determinado intervalo de tempo. Cada tarefa possui um ponto de início, um ponto de término e uma janela de tempo para sua realização, sendo necessário respeitar também os tempos de deslocamento entre as tarefas.

A modelagem adotada neste trabalho é baseada no Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (do inglês Vehicle Routing Problem with Time Windows – VRPTW) (Feillet, 2010), um problema clássico de otimização que busca determinar rotas para uma frota de veículos, respeitando as janelas de atendimento dos clientes. No contexto estudado, os clientes do VRPTW podem ser interpretados como tarefas, enquanto a ligação entre dois clientes representa a possibilidade de realizar uma tarefa após outra. Dessa forma, uma rota de um veículo corresponde a uma sequência de tarefas que pode ser executada respeitando as restrições de tempo e deslocamento.

## MATERIAIS E MÉTODOS

A modelagem do Problema de Alocação de Tarefas considera como objetivo a maximização do número de tarefas realizadas por uma frota limitada de veículos. Cada tarefa pode ser realizada no máximo uma vez e possui uma janela de tempo para sua execução. Uma solução é representada por um conjunto de rotas viáveis, sendo cada rota uma sequência de tarefas que pode ser realizada por um veículo respeitando as restrições de tempo e deslocamento.

Como o número de rotas possíveis pode crescer exponencialmente com o tamanho da instância, a resolução direta do problema torna-se computacionalmente difícil. Para contornar essa dificuldade, utiliza-se a técnica de geração de colunas, na qual inicialmente é considerado apenas um subconjunto de rotas viáveis, formando o Problema Mestre Restrito. Após sua resolução, as informações obtidas são utilizadas para verificar se existem novas rotas capazes de melhorar a solução atual. A busca por essas novas rotas é realizada por meio do Problema do Caminho Mínimo Elementar com Restrições de Recursos (do inglês Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints – ESPPRC) (Feillet *et al.*, 2004), adaptado ao Problema de Alocação de Tarefas. O ESPPRC utiliza as informações fornecidas pelo problema mestre para construir rotas viáveis e identificar aquelas que podem melhorar a solução. Quando uma rota promissora é encontrada, ela é adicionada ao Problema Mestre Restrito e o processo é repetido. Esse procedimento continua até que não sejam encontradas novas rotas capazes de melhorar a solução, obtendo-se, assim, a solução ótima da relaxação linear do problema.

Quando a solução obtida pela geração de colunas é inteira, ela pode ser utilizada como solução do problema original. Entretanto, caso sejam obtidos valores fracionários, é necessário realizar uma etapa de ramificação. Para isso, utiliza-se o método Branch and Price, que combina a geração de colunas com um procedimento de ramificação. Neste trabalho, a ramificação é realizada sobre os arcos das rotas. A partir de um arco que apresenta utilização fracionária, são criados dois novos ramos: um restringindo a utilização desse arco e outro proibindo sua utilização. Cada novo ramo é então resolvido novamente pelo procedimento de geração de colunas e ESPPRC.

O processo de ramificação e geração de colunas é repetido até que sejam obtidas soluções inteiras ou que determinados ramos sejam descartados por inviabilidade. Ao final, a melhor solução inteira encontrada corresponde à solução do problema.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A metodologia proposta foi implementada na linguagem de programação Julia e submetida a testes computacionais com diferentes instâncias do Problema de Alocação de Tarefas. Os resultados obtidos permitiram verificar o funcionamento da geração de colunas, do ESPPRC e do procedimento de Branch and Price, mostrando que a abordagem é capaz de identificar rotas viáveis e melhorar progressivamente a solução do problema mestre.

Para ilustrar o funcionamento do método, considera-se uma instância com três veículos e seis tarefas, cada uma associada a uma origem, um destino e uma janela de tempo. Inicialmente, o Problema Mestre Restrito é construído utilizando rotas que realizam individualmente cada tarefa. A partir da solução inicial, os valores duais são utilizados pelo ESPPRC para buscar novas rotas capazes de melhorar a solução.
Ao longo do processo de geração de colunas, foram identificadas novas rotas que combinavam tarefas de forma viável, como as sequências das tarefas 4 e 5, 2 e 6, e 5 e 1. Essas rotas foram incorporadas progressivamente ao Problema Mestre Restrito. Após algumas iterações, o ESPPRC não encontrou novas rotas capazes de melhorar a solução, indicando que a solução obtida correspondia à solução ótima do Problema Mestre Restrito.
Entretanto, a solução encontrada para essa instância apresentou valor fracionário, sendo necessário aplicar o procedimento de ramificação. Para a ramificação, foram analisados os arcos utilizados pelas rotas e selecionado um arco com valor fracionário. A partir desse arco, foram criados dois novos ramos: um obrigando sua utilização e outro proibindo-a. Cada ramo foi então novamente submetido ao processo de geração de colunas e resolução do ESPPRC.
Esse procedimento permitiu continuar a busca até a obtenção de soluções inteiras, demonstrando, no exemplo analisado, a integração entre a geração de colunas e o processo de ramificação.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi estudada a aplicação do método Branch and Price ao Problema de Alocação de Tarefas, utilizando uma abordagem baseada em geração de colunas. A partir da modelagem do problema, foi realizada a decomposição em um problema mestre e um subproblema de geração de colunas, resolvido por meio de um algoritmo baseado no ESPPRC. Também foi implementado o procedimento de ramificação necessário para tratar soluções fracionárias. A implementação computacional em Julia e os testes realizados permitiram verificar o funcionamento da abordagem e sua capacidade de encontrar soluções para as instâncias consideradas.
Como possíveis trabalhos futuros, pode-se investigar o comportamento do método em instâncias de maior escala, com um número maior de tarefas e veículos. Outra possibilidade consiste em incorporar novas características ao problema, como incompatibilidades entre tarefas, de modo que determinadas tarefas não possam ser realizadas conjuntamente em uma mesma rota. Essas extensões permitiriam avaliar a abordagem em cenários mais complexos e próximos de situações práticas.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao CNPq, à UEM e ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Nogueira Calmon Sobral, pela oportunidade de poder participar desse projeto.

## REFERÊNCIAS

FEILLET, D., A tutorial on column generation and branch-and-price for vehicle routing problems. **4OR**-Q J Oper Res 8, p. 407-424, 2010. DOI 10.1007/s10288-010 0130-z. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s10288-010-0130-z . Acesso em: 24 set. 2026.

FEILLET, D.; DEJAX, P.; GENDREAU, M.; GUEGUEN, C. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints: Application to some vehicle routing problems. **Networks: An International Journal**, v. 44 n. 3, p. 216 229, 2004. DOI:10.1002/net.20033, Disponível em: **https://doi.org/10.1002/net.20033** . Acesso em: 24 set. 2026.