O MODELO DE MAY-LEONARD COM ESTRUTURA ESPACIAL

Gabrielle Stephany Frada Stevanato (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Breno Ferraz de Oliveira (Orientador). E-mail: bfoliveira@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas e da Terra/ Física, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Física / Física Geral

Palavras-chave: Biodiversidade; Difusão Espacial; Competição Cíclica.

RESUMO

O problema da manutenção da biodiversidade em ecossistemas competitivos é investigado neste trabalho por meio de modelagem matemática e cálculo numérica. O objetivo principal foi analisar a dinâmica espaço-temporal de comunidades descritas pelo modelo clássico de May-Leonard para três espécies e expandir a formulação até seis espécies diferentes, incorporando a difusão espacial. A metodologia consistiu na resolução numérica de um sistema de equações diferenciais parciais de reação-difusão utilizando o método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK2) em uma malha quadrada bidimensional com condição periódica de contorno. Os resultados mostram que para diferentes números de espécies, há diferentes comportamentos em um mesmo sistema de equações.

INTRODUÇÃO

A compreensão da dinâmica de populações e das interações entre diferentes espécies é uma questão fundamental no estudo de ecossistemas. Modelos matemáticos, como o de Lotka-Volterra, são clássicos para descrever essas dinâmicas, mas o modelo de May-Leonard (1975) destaca-se por representar a competição cíclica não transitiva, ou seja, onde três ou mais espécies competem entre si e nenhuma espécie é superior a todas as outras; A vence B, a B vence C e C vence A, análoga ao Pedra-Papel-Tesoura entre três espécies (MAY; LEONARD, 1975). Entretanto, as formulações clássicas não consideram explicitamente a distribuição das populações no espaço. O presente trabalho tem como objetivo investigar numericamente a dinâmica espaço-temporal de comunidades competitivas descritas pelo modelo de May-Leonard, expandindo a análise inicial de três espécies para generalizações de até seis espécies. A dimensão espacial foi incorporada através de um sistema de equações de reação-difusão, permitindo verificar como a mobilidade espacial altera as relações ecológicas e contribui para a auto-organização da comunidade (MURRAY, 2003; OKUBO; ACKERMAN; SWANEY, 2002).

METODOLOGIA

A dinâmica espaço-temporal do ecossistema foi descrita por um sistema de equações diferenciais parciais (EDPs) contínuas de reação-difusão. Na formulação espacial generalizada do modelo de May-Leonard para □ espécies, a evolução

temporal da densidade populacional da espécie □, denotada por $\rho_{□}(□, □)$, é governada pela Eq. (1).

$$\frac{\partial \rho_{□}}{□□} = □□^{2}□_{□} + □□_{□}(1 - \sum_{□=1}^{□} □_{□}) - □_{□}\sum_{□=1}^{□} □_{□□}□_{□} \quad □□□□ □ = 1, \ldots, □. \tag{1}$$

Nessa expressão, □ é a constante de mobilidade, ∇^2 é o operador Laplaciano e □ corresponde à taxa de crescimento. O termo $□□^{2}□_{□}$ descreve a mobilidade espacial das espécies por difusão, enquanto $□□_{□}(1 - \sum_{□=1}^{□} □_{□})$ representa a dinâmica de crescimento local, limitada pela densidade populacional total. Por sua vez, o termo $-□_{□}\sum_{□=1}^{□} □_{□□}□_{□}$ representa explicitamente a competição entre as espécies, sendo $\rho_{□□}$ os elementos que definem a estrutura e a intensidade das interações competitivas.

As simulações computacionais para a resolução deste modelo foram implementadas na linguagem C, o operando em ambiente Ubuntu, com a geração de gráficos via Gnuplot. Além disso, o Visual Studio Code foi utilizado como editor para o desenvolvimento e organização do código. O ecossistema foi representado em uma malha bidimensional regular de 250×250 sítios, com condições de contorno periódicas e distribuição de densidade inicial aleatória das espécies.

A evolução temporal das equações foi obtida numericamente através do método de Runge-Kutta de segunda ordem (RK2), na formulação do ponto médio. Para o termo de mobilidade, a discretização espacial utilizou o operador Laplaciano por diferenças finitas para os quatro vizinhos próximos.

Inicialmente, o algoritmo foi generalizado para sistemas compostos por N=4, N=5 e N=6 espécies, mediante o ajuste das dimensões da matriz de interação. Para o caso específico de quatro espécies, testou-se ainda três topologias de matrizes: ciclo direcional, anel bilateral entre vizinhos e pares opostos bilaterais.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na simulação com três espécies (N=3), evidenciou-se que a mobilidade induz a formação de padrões espaciais em espiral (AVELINO et al., 2012), conforme ilustrado na Fig. (1). Apesar das flutuações e oscilações locais contínuas nas densidades, as três populações coexistem estavelmente, comprovando que a estrutura espacial previne a extinção.

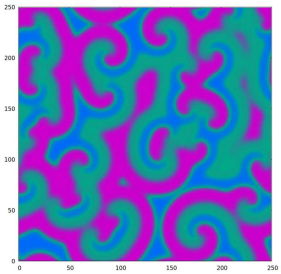


Figura 1 – Padrões espaciais em espiral evidenciando a coexistência estável de três espécies no modelo de May-Leonard.
Fonte: Autoria própria.

A expansão do código para N = 4, 5 e 6 revelou que a topologia da matriz de interação altera significativamente o destino do ecossistema. A Tabela 1 sintetiza as principais diferenças observadas entre os modelos implementados.

Tabela 1 - Observações gerais para cada □ de espécie

Espécies □	**Topologia da Matriz**	**Padrão Espacial Observado**	**Destino da Comunidade**
3	Ciclo não transitivo	Espirais intercaladas	Coexistência estável de todos
4	Ciclo Direcional	Mosaico de interfaces dinâmicas	Coexistência de todos
4	Anel / Bilaterais	Domínios assimétricos	Quebra de simetria e dominância
5 e 6	Ciclo generalizado	Domínios homogêneos	Extinção seletiva e dominância de nichos

Fonte: Autoria própria.

Para N = 4, em um ciclo direcional houve coexistência das quatro espécies, separadas por interfaces dinâmicas (AVELINO et al., 2014). Contudo, interações bilaterais provocaram quebra de simetria e exclusão competitiva, este modelo é exibido na Fig. (2), assim como o comportamento dos demais modelos observados para esse número de espécies.

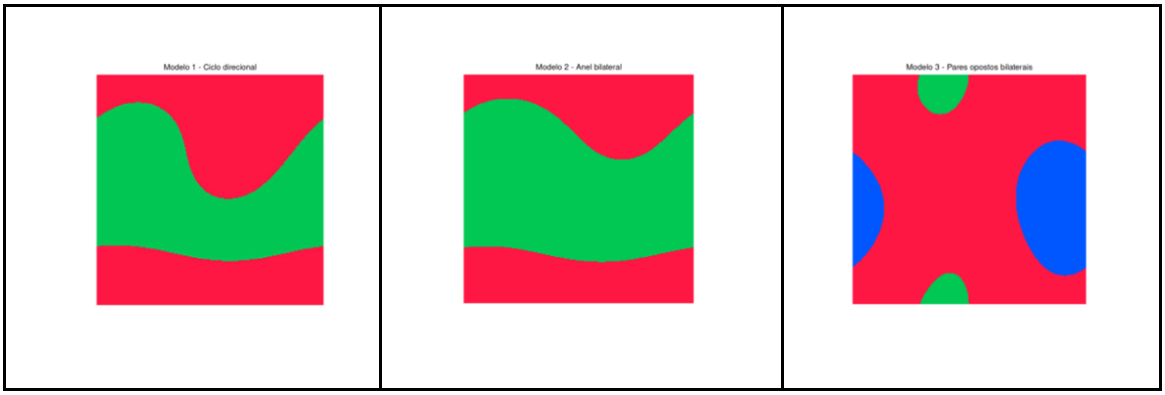


Figura 2 – **(a)** Estado final para o modelo de ciclo direcional; **(b)** Estado final para o modelo de anéis vizinhos bilaterais; **(c)** Estado final para o modelo de pares opostos bilaterais.
Fonte: Autoria própria.

Em N = 5 e N = 6, o sistema convergiu para grandes domínios homogêneos com extinção de espécies intermediárias.

CONCLUSÕES

A inclusão da mobilidade no modelo de May-Leonard é essencial para evitar extinções em sistemas de três espécies. Contudo, em ecossistemas mais complexos ($N \gg 4$), a preservação da biodiversidade depende não apenas do número de espécies, mas da topologia específica das matrizes de interação local (AVELINO et al., 2017).

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao **CNPq**/**FA**/**UEM**, pelo apoio que possibilitou essa pesquisa. Ao meu orientador Prof. Dr. Breno Ferraz de Oliveira, pela oportunidade e acesso a essa área; e ao mestrando Kaique Boldrin por todo apoio e incentivo durante esse processo.

REFERÊNCIAS

AVELINO, P. P., BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, J.; OLIVEIRA, B. F. de **Interfaces with internal structures in generalized rock-paper-scissors models**. Physical Review E, v.89 n.4, p. 042710, 2014.

AVELINO, P. P., BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, J.; OLIVEIRA, B. F. de **Junctions and spiral patterns in generalized rock-paper-scissors models**. Physical Review E, v. 86, n. 3, p. 036112, 2012.

AVELINO, P. P., BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MENEZES, J.; OLIVEIRA, B. F. de **String networks with junctions in competition models**. Physics Letters A, v. 381, n. 11, p. 1014-1020, 2017.

MAY, R. M.; LEONARD, W.J. **Nonlinear aspects of competition between three species**. SIAM Journal on Applied Mathematics, v. 29, p. 243-253, 1975.

MURRAY, J. D. **Mathematical biology II: spatial models and biomedical applications**. 3. ed. New York: Springer, 2003.

OKUBO, A; ACKERMAN, J. D.; SWANEY, D. P. **Diffusion and ecological problems: modern perspectives**. 2. ed. New York: Springer, 2002.