ÓRBITAS PLANETÁRIAS E LEIS DE KEPLER

Artur Nogueira Fukuciro Rodrigues da Silva (PIC/FNDE /UEM), Brian David Grajales Triana (Orientador). E-mail: ra143705@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática Aplicada, Física Matemática

Palavras-chave: geometria analítica; mecânica clássica; mecânica celeste

RESUMO

Este trabalho apresenta os principais resultados desenvolvidos durante o projeto de iniciação científica Órbitas planetárias e leis de Kepler, no qual se realizou um estudo das três leis do movimento planetário de Johannes Kepler, contextualizadas na mecânica clássica e na gravitação universal de Newton. O objetivo geral do projeto foi demonstrar e compreender o comportamento orbital dos corpos celestes por meio da integração entre geometria analítica, cálculo diferencial e leis de conservação. A metodologia fundamentou-se em revisão de bibliografia e reuniões semanais para discussão do material estudado. Dentre os resultados, destacam-se a representação analítica de órbitas elípticas através do estudo das cônicas, a dedução formal da segunda lei de Kepler a partir da conservação do momento angular e a verificação da terceira lei via formulação newtoniana da força central gravitacional. Conclui-se que a abordagem interdisciplinar entre matemática e física fortalece e consolida a compreensão dos fenômenos astronômicos vistos no decorrer da iniciação científica.

INTRODUÇÃO

O estudo da mecânica celeste é uma forma antiga de utilizar a matemática aplicada na física. Historicamente, as três leis de Kepler, formuladas no início do século XVII a partir das observações astronômicas de Tycho Brahe herdadas por seu assistente Johannes Kepler, descreveram empiricamente o movimento orbital dos corpos celestes (Kepler, 1609). Posteriormente, Isaac Newton demonstrou que tais leis decorrem diretamente das leis fundamentais da dinâmica e da lei da gravitação universal, tornando assim a mecânica clássica usada na Terra como uma regra que funciona em qualquer canto do universo. A geometria analítica fornece os fundamentos necessários para a representação das trajetórias orbitais por meio das equações cartesianas das cônicas, enquanto o cálculo diferencial possibilita analisar a variação das velocidades orbitais e das acelerações centrípetas. O objetivo deste trabalho é demonstrar e compreender as leis de Kepler, estabelecendo a conexão teórica entre a geometria das cônicas, a dinâmica newtoniana e os princípios de conservação do momento linear e angular.

REVISÃO DE LITERATURA

A pesquisa foi conduzida seguindo uma metodologia de revisão, estruturada em etapas progressivas de estudo e modelagem matemática. Na primeira etapa, realizou-se o estudo dos fundamentos de geometria analítica no plano (MOURA), focando o entendimento de espaços cartesianos e euclidianos no capítulo 3 e no estudo das cônicas no capítulo 4, dando ênfase a uma em específico: a elipse, compreendendo assim o lugar geométrico do conjunto de seus pontos, sua excentricidade e a relação das duas últimas com seus focos. Na segunda etapa, abordaram-se os princípios da mecânica clássica (SERWAY; JEWETT, 2015), iniciando com um estudo do movimento em duas dimensões e modelos de análise sobre movimento circular uniforme no capítulo 4, dando ênfase as 3 leis de newton no capítulo 5 e em suas aplicações para o movimento circular no capítulo 6. Os capítulos 9 e 11 se referem, respectivamente, ao momentum linear e angular, que são essenciais para o desenvolvimento da segunda lei de Kepler que foi estudada no capítulo 13, este último também nos apresenta a lei de gravitação universal de Newton e como ela, somada ao momentum angular, é utilizada para a compreensão das 3 leis de Kepler.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Antes de analisar o movimento planetário, é necessário compreender a geometria da elipse. Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos num plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos (F_1 e F_2), é constante e igual ao comprimento do eixo maior ($2a$). Em um sistema de coordenadas cartesianas centrado na elipse, sua equação é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Nesta equação, a representa o semieixo maior (a metade do diâmetro mais longo) e b representa o semieixo menor (a metade do diâmetro mais curto).
O grau de achatamento dessa curva é medido pela excentricidade (e), calculada por:

$$e=\frac{c}{a}$$

onde $c=\sqrt{a^2-b^2}$ representa a distância do centro a um dos focos. A excentricidade varia no intervalo $0 \leq e < 1$. Quando $e = 0$, os focos coincidem no centro e a elipse torna-se uma circunferência perfeita; quanto mais próxima de 1, mais "achatada" a cônica se torna.

A partir do estudo da geometria cônica e das referências históricas consultadas, compreende-se a forma das trajetórias planetárias resumida na primeira lei:
A primeira lei de Kepler afirma que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, estando o Sol localizado em um dos focos da elipse.

Para descrever o movimento planetário a partir da mecânica clássica, considera-se um planeta de massa m orbitando um corpo central (o Sol) de massa M, posicionado na origem do sistema de coordenadas. O vetor posição r indica a localização do planeta em relação ao corpo central.
A atração entre os dois corpos ocorre por meio da força gravitacional (F), descrita pela lei da gravitação universal de Newton:

$$\mathrm{F} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}\hat{\mathrm{r}}$$

Nessa expressão, G é a constante gravitacional universal, r é o módulo da distância entre as massas (comprimento de r) e $\hat{\mathrm{r}}$ é o vetor unitário orientado na direção do raio vetor. Por apontar sempre ao longo da linha que une o planeta ao centro atrator, a força gravitacional é classificada como uma força central.
O torque (τ) mede a capacidade de uma força alterar o estado de rotação de um corpo em relação a um ponto de referência:

$$\tau = \mathrm{r} \times \mathrm{F}$$

Como o vetor posição r e a força central F atuam na mesma linha de ação (são paralelos), o produto vetorial entre eles é nulo $(\tau = 0)$.
A ausência de torque resulta na conservação do momento angular (L), definido por:

$$\mathrm{L} = \mathrm{r} \times \mathrm{p} = m(\mathrm{r} \times \mathrm{v})$$

onde p é o momento linear e v é a velocidade vetorial do planeta. Pela relação $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \tau = 0$, conclui-se que o momento angular L permanece constante em módulo, direção e sentido durante todo o percurso.
A conservação de L garante que o movimento ocorra em um plano fixo e determina a velocidade areolar, que representa a taxa de variação da área A varrida pelo raio vetor em relação ao tempo t:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Como o módulo do momento angular L e a massa do planeta m são constantes, a taxa $\frac{dA}{dt}$ também permanece invariável. Isso constitui formalmente a segunda lei de Kepler (lei das áreas): o raio vetor que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Em termos práticos, o planeta se desloca mais rapidamente quando está mais próximo do Sol (periélio) e mais devagar quando está mais afastado (afélio).

A terceira lei relaciona o tempo necessário para o planeta realizar uma volta completa ao redor do Sol — o período orbital (T) — ao tamanho de sua órbita, expresso pelo semieixo maior (a).

Integrando a velocidade areolar ao longo de uma revolução completa (tempo T), a área total varrida é a área de uma elipse ($A = \pi \cdot a \cdot b$). Sabendo que a taxa $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ é constante, a área total também é dada por $A = \left(\frac{L}{2m}\right)T$.
Ao igualar as duas expressões de área e aplicar a relação do momento angular em órbitas elípticas em função da massa do corpo central M e da constante gravitacional G, obtém-se:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G \cdot M}\right)a^3$$

Esta relação estabelece a terceira lei de Kepler: o quadrado do período orbital T é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior a. Como o termo $\left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)$ depende apenas da constante G e da massa do corpo central M, a razão $\frac{T^2}{a^3}$ é idêntica para todos os corpos que orbitam o mesmo objeto central.

CONCLUSÕES

O estudo desenvolvido permitiu compreender e demonstrar a física do movimento planetário e a estrutura das leis de Kepler no contexto da mecânica clássica. A articulação entre geometria analítica, cálculo diferencial e leis de conservação evidenciou a importância da física-matemática aplicada na astronomia.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao professor Brian David Grajales Triana por toda a orientação e apoio concedido nesse tempo de pesquisa, aos tutores e membros do PET Matemática pelo tempo e espaço concedidos no projeto e a todos os familiares, amigos e colegas que, de sua maneira particular, sempre o apoiaram.

REFERÊNCIAS

MOURA, A. A., **Álgebra Linear com Geometria Analítica.** Versão online disponível em http://www.ime.unicamp.br/~aamoura/Ensino/Ensino.html

SERWAY, R; JEWETT, J.W. **Física para ciencias e ingeniería v. 1.** Novena edición. Cengage Learning, 2015.

KEPLER, Johannes. **Astronomia nova**: seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis. Pragae: Gotthard Vögelin, 1609.