# NOÇÕES DE ÁLGEBRA COMUTATIVA

Gabriela Alves Colombo (PIC/UEM), Murilo Perini (PIC/UEM), Maria Elenice Rodrigues Hernandes (Orientadora). E-mail: merhernandes@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

**Área e subárea do conhecimento: Matemática/Álgebra.**

**Palavras-chave:** Anéis; Módulos; Homomorfismos.

## RESUMO

A Álgebra Comutativa tem como objeto de estudo estruturas algébricas fundamentais, como anéis, ideais e módulos. Historicamente, essa área obteve a contribuição de diversos matemáticos, como Julius Wilhelm Richard Dedekind, Abraham Halevi Fraenkel, David Hilbert e Amalie Emmy Noether. Este projeto teve como objetivo estudar conceitos fundamentais da Álgebra Comutativa para compreender as relações existentes entre essas estruturas. Para isso, foi realizado um estudo teórico, baseado na análise de definições, exemplos, propriedades, teoremas e demonstrações de resultados. Inicialmente, foram estudadas as propriedades de anéis, incluindo os conceitos de anel comutativo, domínio de integridade e corpo, juntamente com exemplos de anel, sendo o principal deles, o anel de polinômios. Em seguida, foram abordados os conceitos de ideais, ideais principais, primos e maximais, bem como a construção de anéis quocientes e as relações entre essas estruturas. Também foram estudados os conceitos de homomorfismos de anéis, núcleo e imagem, tendo como resultado principal o Teorema do Isomorfismo. Posteriormente, o estudo avançou para o conceito de módulo sobre um anel, contemplando os conceitos de submódulo, módulo quociente e homomorfismos de módulos. Por fim, foi introduzido o conceito de sequência exata e suas relações com módulos e homomorfismos. O estudo permitiu compreender como todos os conceitos se relacionam e forneceram uma base para o aprofundamento no estudo da teoria da Álgebra Comutativa.

## INTRODUÇÃO

O pioneiro no estudo de anéis foi o matemático Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), com seus trabalhos na teoria de polinômios e dos inteiros algébricos. Embora tenha contribuído significativamente para o desenvolvimento dessa teoria, ele ainda não utilizava o termo “anel” nem apresentava uma definição formal equivalente à adotada atualmente. Posteriormente, Abraham Halevi Fraenkel (1891-1965) apresentou uma primeira definição desse conceito, que exigia que todo elemento não divisor de zero tivesse um inverso multiplicativo. Mas foi Amalie Emmy Noether (1882-1935) quem apresentou a definição utilizada atualmente de Anel Comutativo, sendo homenageada com a denominação dos anéis Noetherianos.

Nesse contexto, este trabalho teve como objetivo estudar conceitos fundamentais da Álgebra Comutativa, como anéis, ideais, módulos e homomorfismos, tendo como aporte teórico as obras de Atiyah e Macdonald (2018), Borges e Tengan (2015) e Reid (2012), buscando construir uma base teórica para estudos posteriores na área. O estudo desses conceitos se justifica pois propicia o aprofundamento de conceitos da Álgebra Comutativa e Geometria Algébrica para além do que é visto em um curso de graduação em Matemática. Esta pesquisa se classifica como uma pesquisa teórica e bibliográfica desenvolvida por meio do estudo e da análise de definições, propriedades, teoremas e demonstrações dos principais resultados da teoria de Álgebra Comutativa.

## REVISÃO DE LITERATURA

Como este projeto é uma iniciação científica na área da Matemática, utilizou-se majoritariamente de uma metodologia baseada em pesquisa bibliográfica. As referências adotadas foram Atiyah e MacDonald (2018), que apresentam os fundamentos da Álgebra Comutativa, tratando de anéis, ideais, módulos e sequências exatas. Em Borges e Tengan (2015) os mesmos conceitos são desenvolvidos com uma abordagem mais detalhada e rica em exemplos. Já Reid (2012) apresenta a Álgebra Comutativa em conexão com a Geometria Algébrica, evidenciando motivações geométricas da teoria e apontando direções para estudos futuros. Essas obras foram estudadas por meio de leituras dirigidas e seminários semanais, nos quais os resultados eram apresentados e discutidos com a orientadora.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste projeto, o primeiro objeto de estudo foi o conceito de anel: um conjunto não vazio munido de duas operações, adição e multiplicação, satisfazendo propriedades como comutatividade e associatividade da adição, existência de elemento neutro e oposto, associatividade da multiplicação e distributividade. Quando a multiplicação é comutativa e existe elemento identidade, dizemos que o anel é comutativo com identidade, e os elementos que possuem inverso multiplicativo são chamados de unidades do anel. Foram demonstradas propriedades básicas dessas operações, como a unicidade do elemento neutro, do oposto e do inverso, e estudados diversos exemplos, como os anéis dos números inteiros, racionais, reais e complexos, o anel das classes de restos módulo n e o anel das matrizes quadradas com entradas inteiras, este último não comutativo. Também foi estudado o conceito de subanel, com um critério prático para verificar quando um subconjunto de um anel é um subanel.

Em seguida, foram abordados os divisores de zero e os domínios de integridade, que são anéis comutativos com identidade sem divisores de zero, nos quais vale a lei do cancelamento para a multiplicação. Provou-se que o anel das classes de restos módulo p é um domínio se, e somente se, p é primo. Foram estudados ainda os elementos nilpotentes e os corpos, anéis comutativos com identidade em que

todo elemento não nulo é uma unidade. Demonstrou-se que todo corpo é um domínio e que todo domínio finito é um corpo, obtendo como consequência que o anel das classes de restos módulo p é um corpo se, e somente se, p é primo.
Posteriormente, nosso foco foi o estudo dos ideais, que são subanéis que contém a multiplicação por elementos do anel. Foram definidas operações entre ideais, como soma, produto e interseção, e os conceitos de ideal gerado por um conjunto, ideal principal e domínio de ideais principais. A partir de um ideal I de um anel A, construiu-se o anel quociente A/I, cujos elementos são as classes de equivalência da relação definida por x~y se, e somente se, x - y pertence a I. Duas classes especiais de ideais tiveram uma atenção especial: os ideais primos e maximais. Demonstrou-se que A/I é um domínio se, e somente se, I é um ideal primo, e que A/I é um corpo se, e somente se, I é um ideal maximal, obtendo como corolário que todo ideal maximal é primo.
Na Matemática, quando estudamos uma determinada classe de objetos, naturalmente buscamos condições sobre uma aplicação entre elementos desta estrutura que preservam as propriedades estudadas. Os homomorfismos de anéis são aplicações entre anéis que preservam as operações de soma e multiplicação. Nesse contexto, podemos definir os conceitos de núcleo e imagem. Provou-se que o núcleo de um homomorfismo é um ideal do anel de partida, que um homomorfismo é injetor se, e somente se, seu núcleo é nulo e, como resultado principal, o Teorema do Isomorfismo, que garante que o quociente do anel de partida pelo núcleo é isomorfo à imagem do homomorfismo. Como aplicação, obteve-se uma caracterização dos corpos: um anel comutativo com identidade é um corpo se, e somente se, seus únicos ideais são o nulo e o próprio anel, o que equivale a todo homomorfismo não nulo partindo dele ser injetor.
O principal exemplo estudado foi o anel de polinômios A[x] com coeficientes em um anel comutativo A. Demonstrou-se que A[x] é um domínio se, e somente se, A é um domínio, e foram caracterizadas as unidades de A[x]: um polinômio é inversível se, e somente se, seu termo constante é uma unidade de A e os demais coeficientes são nilpotentes. Em particular, quando A é um domínio, as unidades de A[x] são exatamente as unidades de A, o que explica por que o polinômio $3+2x-2x^2$ não é inversível com coeficientes reais, mas é seu próprio inverso com coeficientes no anel das classes de resto módulo 4.
Posteriormente, o estudo avançou para os módulos sobre um anel comutativo com identidade A, grupos abelianos nos quais A age linearmente, generalizando simultaneamente os conceitos de ideal e de espaço vetorial, pois todo ideal de A é um A-módulo e, quando A é um corpo, um A-módulo é um espaço vetorial. Foram estudados submódulos, os homomorfismos de módulos, o conjunto dos homomorfismos entre dois módulos, que possui ele próprio uma estrutura de A-módulo, e o módulo quociente. Demonstrou-se que o núcleo e imagem de um homomorfismo de módulos são submódulos e foram provadas versões do Teorema do Isomorfismo para módulos.
Por fim, foi introduzido o conceito de sequência exata: uma sequência de módulos e homomorfismos em que a imagem de cada aplicação coincide com o núcleo da seguinte. Provou-se que a exatidão em posições específicas caracteriza a

injetividade e sobrejetividade dos homomorfismos envolvidos, e foi estudada a noção de sequência exata curta, ilustrada com o exemplo natural fornecido por uma transformação linear entre espaços vetoriais, seu núcleo e sua imagem. Esses resultados conectam todos os conceitos estudados ao longo do projeto e são a porta de entrada para técnicas fundamentais da Álgebra Comutativa.

## CONCLUSÕES

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou o estudo dos principais conceitos introdutórios da Álgebra Comutativa, permitindo compreender mais a fundo como essas estruturas se relacionam. Ao longo do projeto, foi possível perceber como ideais permitem construir anéis quocientes, como núcleo e imagem aparecem nos homomorfismos e como algumas dessas ideias se estendem para módulos. Dessa forma, conclui-se que o estudo realizado cumpriu seu objetivo de propiciar uma base teórica dos conceitos de Álgebra Comutativa, contribuindo para a compreensão de conteúdos mais avançados e para estudos futuros na área.

## REFERÊNCIAS

ATIYAH, M. F., MACDONALD, I. G. **Introduction to Commutative Algebra**. CRC Press, 2018.

BORGES, H.; TENGAN, E. **Álgebra comutativa em quatro movimentos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

REID, M., **Undergraduate Commutative Algebra**. London Mathematical Society. Student Texts 29, Cambridge University Press, 2012.