DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE EM UM PÊNDULO SIMPLES SUBAMORTECIDO

Matheus Ribeiro Rodrigues (PIBIC/CNPq/FA/UEM), Victor Augusto Turetta da Cunha (Extensão UEM), Angela Maria Picolloto (Co-orientadora), José Adauto da Cruz (Orientador).
E-mail: ampicolloto@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Umuarama, PR

Área e subárea de conhecimento: Ciências Exatas e da Terra / Instrumentação Específica de Uso Geral em Física

Palavras-chave: Função de Rayleigh; Mecânica Analítica; Videoanálise.

RESUMO (Arial 12, negrito, alinhado à esquerda, deixe uma linha em branco)

Este trabalho apresenta a determinação experimental da aceleração da gravidade local (g) e a caracterização dinâmica de um pêndulo simples sob regime subamortecido. A modelagem teórica fundamentou-se nas equações de Euler-Lagrange acopladas à Função de Dissipação de Rayleigh para forças de arrasto proporcional à velocidade, além da inclusão de correções relativas à distribuição de massa do fio e ao empuxo do ar sobre a esfera. Coletaram-se dados cinemáticos de vinte oscilações completas para seis comprimentos de fio ($L_1 = 0{,}250$ m a $L_6 = 1{,}510$ m), utilizando uma esfera metálica de 46 g e raio $R = 2{,}16$ cm. A aquisição temporal foi realizada via videoanálise no software *Tracker* e ajustada no Origin pelo modelo de oscilador subamortecido $x(t) = x_0 + A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi)$. Extraíram-se as frequências angulares (ω_0, ω_d) e os coeficientes de amortecimento (γ). A aplicação do modelo com correções geométricas e hidrostáticas resultou no valor médio para a aceleração da gravidade de $g_{corr} = (9{,}8368 \pm 0{,}0044)$ m/s^2.

INTRODUÇÃO (Arial 12, negrito, alinhado à esquerda, deixe uma linha em branco)

O pêndulo simples é idealmente modelado como uma massa pontual presa a um fio inextensível e sem massa. Em sistemas reais, porém, devem ser considerados efeitos dissipativos e correções associadas à distribuição de massa. A mecânica analítica incorpora forças dissipativas proporcionais à velocidade por meio da Função de Dissipação de Rayleigh na equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \quad \text{(Eq. 1)}$$

Sendo $\mathcal{L} = T - V$ a Lagrangiana do sistema. Para pequenas amplitudes ($\sin\theta \approx \theta$), a energia cinética e a potencial são $T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$ e $V \approx \frac{1}{2}mgL\theta^2$.

Admitindo arrasto linear $F_d = cL\dot{\theta}$, a função de dissipação assume a forma $R = \frac{1}{2}cL^2\dot{\theta}^2$. A equação diferencial resultante do movimento é:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{(Eq. 2)}$$

onde $\gamma = \frac{c}{2m}$ é o fator de amortecimento e $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ é a frequência natural do oscilador. A solução no regime subamortecido ($\gamma < \omega_0$) é $\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi)$, com frequência amortecida $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

MATERIAIS E MÉTODOS

O aparato experimental consistiu em um pêndulo composto por fio de nylon e uma esfera metálica de massa $M = 46$ g $(0{,}046$ kg) e raio $R = 2{,}16$ cm $(0{,}0216$ m). O comprimento do fio foi variado em seis posições: $L_1 = 0{,}250$ m, $L_2 = 0{,}495$ m, $L_3 = 0{,}745$ m, $L_4 = 0{,}995$ m, $L_5 = 1{,}256$ m e $L_6 = 1{,}510$ m.

Para cada comprimento, o sistema foi solto do repouso com ângulo inicial $\theta_0 \leq 17{,}75°$. Registrou-se a trajetória ao longo de 20 oscilações completas por filmagem, processada no *software* Tracker para extração das séries temporais de posição. Os dados foram ajustados no Origin por meio da função não linear $x(t) = x_0 + A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi)$, obtendo-se o período amortecido T, a frequência ω_d e a taxa de decaimento γ.

A determinação da aceleração da gravidade corrigida (g_{corr}) incorporou o momento de inércia da esfera, a massa do fio e o empuxo exercido pelo ar sobre a esfera e o fio

$$g_{corr} = \frac{4\pi^2}{T^2}\left[\frac{\frac{1}{3}m_{fio}l^2 + ML^2 + \frac{2}{5}MR^2}{(M - \rho_{ar}V_{esfera})L + (m_{fio} - \rho_{ar}V_{fio})\frac{l}{2}}\right] \quad \text{(Eq. 3)}$$

Em que l representa o comprimento do fio, V_{esfera} e V_{fio} os volumes correspondentes, e ρ_{ar} a densidade do ar.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Análise gráfica para o comprimento L_6 = 1,555m

A curva temporal para o comprimento Lapresenta oscilações com amplitude decrescente. O ajuste não linear no Origin permitiu determinar o coeficiente de subamortecimento. Pêndulos mais longos atingem maiores velocidades e percorrem arcos maiores, aumentando a resistência aerodinâmica. Os parâmetros obtidos e os volumes dos componentes, juntamente com os valores calculados pela Eq. 3, estão apresentados na Tabela1.

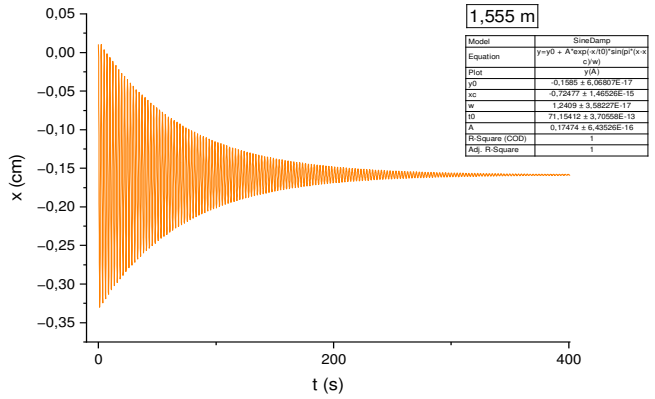


Figura 1 – Posição em função do tempo para o pêndulo simples em regime subamortecido, com ajuste pelo modelo de oscilador harmônico amortecido. Fonte: os autores.

Tabela 1: Parâmetros cinemáticos, coeficientes de amortecimento, volumes dos componentes e gravidade corrigida para diferentes comprimentos de fio.

L (m)	T (s)	θ_0 (°)	ω_0 (rad/s)	ω_d (rad/s)	γ (s^{-1})	V_{fio} (10^{-7} m^3)	Vr_{es} (10^{-5} m^3)	g_{corr} (m/s^2)
1,510 ± 0,472	2,4625 ± 0,5375	17,75 ± 2,61	3,255 ± 6,168	2,53 ± 1,42	0,01400 ± 0,00474	1,8966 ± 0,5925	5,1038 ± 0,0060	9,8633 ± 0,0108
1,256 ± 0,472	2,2450 ± 0,5375	17,10 ± 2,61	3,913 ± 6,168	2,79 ± 1,42	0,00649 ± 0,00474	1,5774 ± 0,5925	5,1006 ± 0,0060	9,8367 ± 0,0108
0,995 ± 0,472	1,9930 ± 0,5375	17,10 ± 2,61	4,940 ± 6,168	3,14 ± 1,42	0,00512 ± 0,00474	1,2497 ± 0,5925	5,0973 ± 0,0060	9,8368 ± 0,0108
0,745 ± 0,472	1,6980 ± 0,5375	15,00 ± 2,61	6,597 ± 6,168	3,65 ± 1,42	0,00460 ± 0,00474	0,9457 ± 0,5925	5,0942 ± 0,0060	9,8368 ± 0,0108
0,495 ± 0,472	1,4415 ± 0,5375	13,60 ± 2,61	9,929 ± 6,168	4,74 ± 1,42	0,01380 ± 0,00474	0,6217 ± 0,5925	5,0910 ± 0,0060	9,8368 ± 0,0108
0,250 ± 0,472	1,0050 ± 0,5375	11,00 ± 2,61	19,660 ± 6,168	6,27 ± 1,42	0,00346 ± 0,00474	0,3140 ± 0,5925	5,0879 ± 0,0060	9,8368 ± 0,0108
—	—	—	—	—	—	—	—	**$\bar{g}$ = 9,8412 ± 0,0044**

Os coeficientes de amortecimento γ variaram entre $0{,}00346\ s^{-1}$ e $0{,}01400\ s^{-1}$. Essa variação aponta que a força de atrito aerodinâmico não é estritamente linear em toda a faixa de operação, apresentando contribuições quadráticas decorrentes da variação da velocidade escalar máxima em função do comprimento L.

A aplicação do modelo de correção resultou na aceleração da gravidade local, $g_{corr} = 9{,}8368$ m/s^2. Para as posições $L_1 = 0{,}250$ m a $L_5 = 1{,}256$ m, a inclusão dos termos do momento de inércia da esfera, da massa do fio e do empuxo atmosférico estabilizou o valor de g_{corr} de forma homogênea.

O desvio observado em $L_6 = 1{,}510$ m ($g_{corr} = 9{,}8633$ m/s^2) decorre do maior ângulo de abertura inicial ($\theta_0 = 17{,}75°$). Para esta amplitude, o termo de terceira ordem da expansão em série de Taylor ($\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$) introduz um erro de aproximadamente $1{,}2\%$ na aproximação paraxial, elevando o período de oscilação real em relação ao modelo linear e afetando a determinação de ω_0.

CONCLUSÕES

O estudo cinemático e dinâmico do pêndulo simples subamortecido resultou na estimativa da gravidade local em $g_{corr} = 9{,}8368$ m/s^2 após a inclusão das correções geométricas e hidrostáticas. O formalismo de Euler-Lagrange, associado à Função de Rayleigh, descreveu o decaimento das amplitudes e permitiu determinar os parâmetros de amortecimento para cada comprimento de fio. Os resultados evidenciaram a influência da distribuição de massa e do arrasto do fluido na dinâmica do oscilador real.

AGRADECIMENTOS

Trabalho financiado pelo CNPq por meio de bolsa PIBIC/UEM. Apoio de infraestrutura provido pela Universidade Estadual de Maringá (UEM).

REFERÊNCIAS

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2001.

SYMON, K. R**. Mechanics**. 3. ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1971.