INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM ESPAÇOS DE BANACH

Isadora Honório Guimarães (PIC/UEM), João Renato Pereira Cordeiro (PIC/UEM), Claudete Matilde Webler Martins (Orientadora). E-mail: ra133486@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra / Análise.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema do Valor Médio, Sequências.

RESUMO

Neste trabalho estamos interessados em alguns teoremas importantes na área da derivação em espaços de Banach que auxiliam o estudo de equações diferenciais nesses espaços. A metodologia de estudo foi com base em bibliografias discutidas em seminários e os resultados obtidos foram as demonstrações detalhadas desses teoremas.

INTRODUÇÃO

Embora inicialmente a derivação tenha sido um conceito desenvolvido para funções reais e, posteriormente, para funções entre espaços euclidianos, os conceitos de derivada podem ser generalizados para funções definidas entre espaços de Banach. Nesse contexto, este trabalho, de caráter teórico e bibliográfico, tem como objetivo estudar o conceito de derivação de funções em espaços de Banach, utilizando como fundamentação teórica resultados de análise e cálculo diferencial. Como delimitação do estudo, serão abordados resultados relacionados à derivação e à integração de funções em espaços de Banach, com destaque para o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema do Valor Médio. A partir das definições e resultados desenvolvidos, serão apresentadas as demonstrações desses teoremas no contexto desses espaços, evidenciando as condições necessárias para sua validade.

MATERIAIS E MÉTODOS

Foram realizadas pesquisas bibliográficas, estudo, seminários e discussão teórica do tema abordado.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentaremos abaixo as definições e resultados necessários para compreender o Teorema do Valor Médio e Teorema do Fundamental do Cálculo e suas respectivas demonstrações, que podem ser encontrados em [1]. Enunciaremos também a Generalização do Teorema de Picard-Lindelöf em espaços de Banach, que nos

garante a existência e unicidade de solução de uma Equação Diferencial Ordinária com determinadas hipóteses.

Uma métrica em M é uma função $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que a cada par ordenado $(x, y) \in M \times M$ associa um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x até y, de tal forma que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

(d1) $d(x, x) = 0$;
(d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;
(d3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Propriedade simétrica);
(d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Desigualdade triangular).

Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f: M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Dizemos que f é contínua quando ela é contínua em todos os pontos que pertencem a M.

Seja $f: [a, b] \to B$ uma aplicação, onde B é um espaço de Banach e $-\infty < a < b < \infty$. Definimos as somas parciais

$$S_P = \sum_{\{i=1\}}^{n} f(\overline{t_i})(t_i - t_{i-1}), \qquad t_{i-1} \leq \overline{t}_i \leq t_i,$$

onde P é uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$ e $\Delta P = \max_{1 \leq i \leq n}(t_i - t_{i-1})$ é a norma da partição. Analogamente à integral de Riemann clássica, definimos

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{k \to \infty} S_{P_K},$$

caso esse limite comum exista para toda sequência de partições (P_K) tal que $\Delta P_k \to 0, k \to \infty$.

Seja $f: D(f) \subseteq \mathbb{R} \to B$ uma aplicação em um espaço de Banach B, com $t_0 \in int\, D(f)$. Definimos a derivada de f no ponto t_0 como

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

Se esse limite existir. As derivadas superiores são definidas iterativamente. As derivadas laterais são definidas pelos limites laterais.

O supremo (sup) é o menor elemento de um conjunto que é maior ou igual a todos os números desse conjunto.

(Teorema do Valor Médio) Seja $f: [a, b] \to B$ uma aplicação contínua no espaço de Banach B. Suponha que $f'(t)$ existe para todo $t \in [a, b], -\infty < a < b < \infty$; aqui $f'(a)$ e $f'(b)$ são limites laterais. Então são válidos os seguintes itens:

1. $|| f(b) - f(a)|| \leq (b - a) \sup_{a<t<b} ||f'(t)||$;
2. $||f(b) - f(a) - (b - a)f'(t_0)|| \leq (b - a) \sup_{a<t<b} ||f'(t) - f'(t_0)||, \ \forall t_0 \in [a, b]$;
3. $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$, se f' é contínua em $[a, b]$.

(Teorema Fundamental do Cálculo) Seja $F: [a, b] \to B$ uma aplicação contínua em um espaço de Banach B, com $-\infty < a < b < \infty$. Definimos

$$f(t) = \int_a^t F(s)\, ds, \qquad \forall t \in [a, b].$$

Então, $f'(t)$ existe para todo $t \in]a, b[$ e $f'(t) = F(t)$.

Com esses e outros resultados, é possível demonstrar o seguinte teorema:

(Generalização do Teorema de Picard-Lindelöf) Seja $t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in B$, com B sendo um espaço de Banach, e

$$Q_b = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times B: |t - t_0| \leq a, ||y - y_0|| \leq b\},$$

para $a, b > 0$ fixos. Suponha que $f: Q_b \to B$ seja contínua e

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||, \qquad \forall (t, x), (t, y) \in Q_b,$$

e

$$||f(t, y)|| < K, \qquad \forall (t, y) \in Q_b$$

onde $L \geq 0, K > 0$ são números reais fixados. Escolha c tal que $0 < c < a$ e $Kc < b$. Então as seguintes afirmações são válidas:

a) Existência e unicidade: O problema de valor inicial

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big), x(t_0) = y_0$$

tem exatamente uma solução continuamente diferenciável $x(.)$ no intervalo $[t_0 - c, t_0 + c]$.

b) Aproximação sucessiva: A aproximação sucessiva (x_n) onde

$$x_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\ ds, \qquad x_0(t) = y_0,$$

converge uniformemente em $[t_0 - c, t_0 + c]$ quando $n \to \infty$ para a solução $x(.)$.

c) Dependência contínua do valor inicial: A solução $x(.)$ Depende continuamente, com respeito a norma em $C([t_0 - c, t_0 + c], B)$ no valor inicial y_0.

CONCLUSÕES

O projeto de iniciação científica permitiu estudarmos alguns teoremas fundamentais para o cálculo diferencial e integral em espaços de Banach, incluindo o Teorema do Valor Médio e o Teorema Fundamental do Cálculo, além disso possibilitou escrevermos detalhadamente vários resultados envolvendo o assunto estudado.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.

[2] ZEIDLER, Eberhard. **Nonlinear Functional Analysis and its Application. Part 1: Fixed-Point Theorems.** Translated by Peter R. Wadsack. New York: Springer-Verlag, 1986.