REFLEXÕES NO PLANO: UM ESTUDO EM GEOMETRIA DE TRANSFORMAÇÕES

Diogo da Silva Ferreira (PICME/IMPA/CNPq/UEM), Patrícia Hernandes Baptistelli (Orientadora). E-mail:phbaptistelli@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Geometria e Topologia.

Palavras-chave: simetrias; isometrias; composição de reflexões

RESUMO

Neste projeto, estudamos as transformações geométricas no plano euclidiano, com especial atenção às reflexões. Primeiramente, abordamos conceitos fundamentais como colineações, involuções, translações, rotações, reflexões, isometrias e simetrias. Estudamos de modo mais detalhado as reflexões no plano e alguns resultados relacionados, como o teorema que estabelece que toda isometria plana é a composição de, no máximo, três reflexões. Também estudamos os grupos de simetria de polígonos, como os grupos diedrais.

INTRODUÇÃO

Em 1872, foi proposto por Félix Klein o chamado *Programa de Erlangen*, sugerindo que diferentes geometrias poderiam ser caracterizadas pelo seus grupos de simetria. No contexto do plano euclidiano, uma isometria será uma simetria para um subconjunto do plano se deixar tal subconjunto invariante. Desse modo, as reflexões adquirem um papel central, pois toda isometria pode ser construída por uma composição de reflexões.

Este projeto tem como objetivo estudar o comportamento e a estrutura das reflexões em torno de retas no plano. Intuitivamente, uma reflexão atua como um espelhamento geométrico de pontos: dada uma reta, chamada eixo de simetria, cada ponto do plano é mapeado em um ponto correspondente localizado no lado oposto desse eixo a uma mesma distância ortogonal.

REVISÃO DE LITERATURA

A metodologia utilizada consistiu na pesquisa em materiais bibliográficos que abordam o tema do projeto, além da apresentação de seminários semanais para a orientadora. No estudo das transformações geométricas no plano, utilizamos as obras de George Martin (1982) e de Israel Herstein (1996), esta última para um melhor entendimento da estrutura algébrica de grupo, que foi utilizada no estudo das transformações no plano.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O principal objetivo do projeto foi estudar as reflexões no plano euclidiano e compreender as suas propriedades geométricas e algébricas. Iniciamos com o conceito de transformação plana, que consiste em uma correspondência biunívoca do plano nele mesmo. Também estudamos algumas propriedades estruturais, como o resultado de que a composição de transformações é ainda uma transformação. Além disso, exploramos alguns tipos específicos, como colineações, involuções, translações, rotações, reflexões, isometrias e simetrias.

Em seguida, estudamos de maneira mais detalhada as reflexões em torno de retas no plano, verificando propriedades como a involutividade e a preservação de distâncias (isometria). A partir das equações que descrevem uma reflexão em torno de uma reta pela origem, determinamos a matriz associada a essa transformação, estabelecendo uma relação entre a descrição geométrica da reflexão e sua representação algébrica.

Durante o desenvolvimento do projeto, esses resultados foram diretamente relacionados com conceitos da Teoria de Grupos. Observamos que o conjunto G de todas as transformações do plano possui uma estrutura de grupo quando munido da operação de composição. Da mesma forma, o conjunto de todas as isometrias planas também constitui um grupo, sendo um subgrupo de G. Essa estrutura permitiu interpretar a composição de transformações como uma operação algébrica e utilizar propriedades de grupos para organizar e compreender as diferentes transformações estudadas.

Em particular, verificamos que as reflexões, embora sejam transformações simples do ponto de vista geométrico, desempenham um papel fundamental na estrutura do grupo das isometrias. Além disso, a posição relativa das retas de reflexão determina o tipo de isometria obtida pela composição: quando as retas são paralelas, a composição de reflexões resulta em uma translação; quando são concorrentes, resulta em uma rotação. Esses resultados permitiram compreender que as reflexões não constituem apenas uma classe particular de isometrias, mas podem ser utilizadas como elementos geradores (de um grupo) para a construção de todas as isometrias planas. De fato, um resultado central da teoria estabelece que toda isometria no plano é a composição de, no máximo, três reflexões.

Por fim, utilizamos os resultados obtidos para estudar os grupos de simetria de polígonos, em especial os grupos diedrais e aqueles gerados por rotações de ordem finita. Neste contexto, as rotações e as reflexões que preservam um polígono são interpretadas como elementos de um grupo, e suas composições determinam a estrutura algébrica desse grupo.

CONCLUSÕES

Concluímos que as reflexões ocupam uma posição central no estudo das isometrias e simetrias do plano, como elementos geradores dessas transformações. Além de possuírem propriedades geométricas importantes, como a involutividade e a preservação de distâncias, as reflexões permitem construir outras isometrias por meio da operação de composição. Em particular, a composição de reflexões produz translações ou rotações, dependendo da posição relativa das retas envolvidas.

Este estudo também permitiu compreender a relação entre a Geometria de Transformações e a Teoria de Grupos, uma vez que as transformações geométricas também podem ser vistas como elementos de um grupo, determinado pela composição das transformações. Neste contexto, o estudo dos grupos diedrais nos mostrou como as simetrias de uma figura podem ser descritas por meio de uma abordagem algébrica, sendo as reflexões e as rotações que preservam um polígono os elementos de um grupo. Portanto, a Teoria de Grupos fornece uma linguagem para organizar as transformações geométricas, enquanto que a Geometria dessas transformações torna concretos conceitos puramente algébricos, como a composição e os geradores de um grupo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo incentivo aos estudos, à minha orientadora pelo apoio e conhecimento, ao CNPq pelo suporte à pesquisa e ao IMPA pela oportunidade.

REFERÊNCIAS

HERSTEIN, I. N. Groups. *In*: HERSTEIN, I. N. **Abstract algebra.** 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1996. p. 40-54.

HERSTEIN, I. N. Things Familiar and Less Familiar. *In*: HERSTEIN, I. N. **Abstract algebra.** 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1996. p. 1-18.

MARTIN, G. E. **Transformation geometry: an introduction to symmetry.** New York: Springer-Verlag, 1982.