FENÔMENO DE GIBBS

Samuel Vitório Pereira (PIC/FNDE/UEM) Juliana Honda Lopes (Orientadora). E-mail: ra126195@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Análise

Palavras-chave: série de Fourier; análise harmônica; convergência uniforme

RESUMO

Um dos problemas da análise de Fourier consiste em determinar sob quais hipóteses é possível representar uma função a partir de uma série trigonométrica. Consideraremos o problema da convergência da série de Fourier para o caso em que a função apresenta um número finito de descontinuidades de salto no seu período. Neste caso, a soma parcial da série apresenta oscilações na vizinhança dos pontos de descontinuidade que não desaparecem mesmo quando considerados mais termos na soma. Esse fenômeno é conhecido pelo nome de fenômeno de Gibbs. Neste trabalho estudamos o fenômeno de Gibbs via onda quadrada.

INTRODUÇÃO

Jean B. Fourier (1768-1830) foi o pioneiro na investigação do problema de representação de uma função por uma série trigonométrica. Em seu famoso trabalho *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoria Analítica do Calor), publicado em 1822, esse problema foi colocado em termos mais claros, introduzindo o conceito conhecido atualmente como série de Fourier. Fourier obteve ainda, um resultado conhecido como teorema de Fourier, que garante que a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade, se f for seccionalmente diferenciável e absolutamente integrável. No final da década de 1890, Josiah W. Gibbs (1839-1903), estudou a convergência da série de Fourier próximo a um ponto de descontinuidade e descobriu um comportamento curioso, que ficou conhecido como *fenômeno de Gibbs*: a oscilação da soma parcial de ordem N no ponto de descontinuidade, não aproxima o salto de f neste ponto.

REVISÃO DE LITERATURA

Este trabalho foi feito via método de revisão de literatura. Inicialmente, a pesquisa abordou a teoria clássica das séries de Fourier e suas propriedades de convergência, com base nos trabalhos de Figueiredo e Fernandez. Na sequência, a investigação do fenômeno de Gibbs apoiou-se nos estudos de Benson, por meio da

análise do exemplo construído no Capítulo 2, que ilustra de forma prática a ausência de convergência uniforme nas vizinhanças dos pontos de descontinuidade.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O estudo das séries de Fourier consiste, entre outras coisas, em determinar sobre quais condições e de que maneira uma função periódica de período $2L$ pode ser representada por uma série trigonométrica convergente da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos\ \frac{n\pi x}{L} + b_n sin\ \frac{n\pi x}{L} \right),$$

onde a_n e b_n são números reais. Suponha que a função f passa ser representada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos\ \frac{n\pi x}{L} + b_n sin\ \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Neste caso, os coeficientes são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos \frac{n\pi x}{L} dx\ , b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx\ ,$$

e com isto, a série é chamada de série de Fourier de $f(x)$ e os coeficientes são chamados de coeficientes de Fourier de f. É importante destacar que a série de Fourier de uma função integrável nem sempre coincide com a função, porém algumas hipóteses sobre a função nos permitem garantir que f coincida com a sua série de Fourier.

Seja f uma função 2L-periodica e integrável no intervalo $[-L, L]$. Introduzimos a N-ésima soma parcial de Fourier da função f denotada por $S_N(x)$ e definida no intervalo $[-L, L]$, com sendo,

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n cos\ \frac{n\pi x}{L} + b_n sin\ \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Para além da forma de calcular, é importante saber se a soma parcial irá convergir para f ou não. O teste de Jordan garante a convergência pontual da série para $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, onde $f(x^+)$ e $f(x^-)$ denotam respectivamente os limites laterais de f à direita e à esquerda de x, desde que f seja uma função de variação limitada e periódica de período $2L$. Já o Teorema de Fourier, garante que a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade, desde que f seja seccionalmente diferenciável e absolutamente integrável.

Para poder ilustrar a diferença entre essas duas convergências e poder estudar o fenômeno de Gibbs, vamos considerar a função de onda quadrada, mostrada na figura 1 abaixo, como sendo a extensão 2-periodica da função definida no intervalo $[-1, 1]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

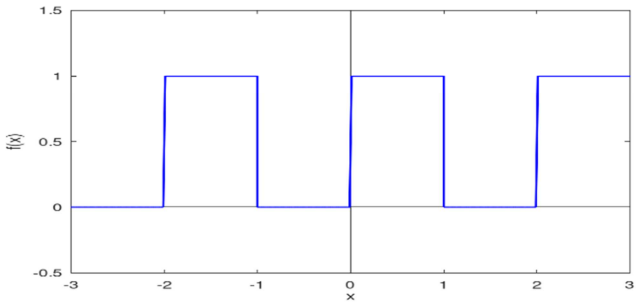


Figura 1 – Gráfico da função onda quadrada.

Esta função, conhecida como onda quadrada ou trem de pulso, é uma onda caracterizada pela alternância entre um estado de amplitude nula e outro estado de amplitude máxima, sendo que cada um destes estados tem duração igual. Este tipo de onda é utilizado em telecomunicações, informática e na música.

Vamos calcular a série de Fourier de f. Para isto, vamos calcular os seus coeficientes de Fourier, para obter

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 1\,dx = 1, \quad a_n = \int_{0}^{1} cos(nx\pi)dx = \frac{1}{n\pi}\, sin\,(n\pi x\,)|\frac{1}{0} = 0,$$

$$b_n = \int_{0}^{1} sin\,(nx\pi)\,dx = \frac{-1}{n\pi} cos\,(nx\pi)\,|\frac{1}{0} = \frac{-1}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Assim, a N-ésima soma parcial de $f(x)$ é dada por

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(b_n \sin(n\pi x)\,) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(sen(\pi x) + \frac{1}{3}sen(3\pi x) + \frac{1}{5}sen(5\pi x) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{N}\frac{1}{n}sen(n\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]}\frac{1}{2k-1}sen\big((2k-1)\pi x\big).$$

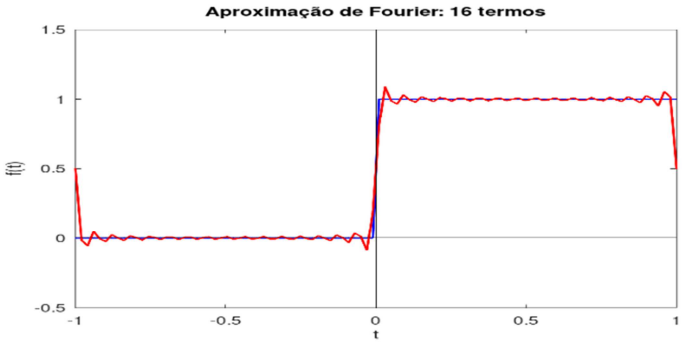


Figura 2 – Aproximação da onda quadrada pela sua aproximação de Fourier de ordem 16.

Observando o gráfico anterior dado pela Figura 2, notamos que a sequência das somas parciais parece estar convergindo lentamente para a onda quadrada e

ficando mais e mais acidentada neste processo nos pontos -1, 0 e 1. De fato, o teorema de Fourier nos garante que esta sequência converge para f exceto nos pontos de descontinuidade de f. Observamos ainda, que existe um fenômeno interessante acontecendo próximo dos pontos de descontinuidade. Quando estamos próximos e a direita do ponto 0, por exemplo, o gráfico apresenta uma elevação.

CONCLUSÕES

Concluímos que o fenômeno de Gibbs é um bom exemplo para ilustrar a distinção entre a convergência pontual e a convergência uniforme. No exemplo aqui tratado, observamos que esta série de Fourier converge pontualmente, mas não uniformemente.

REFERÊNCIAS

BENSON, D., Music: **A Mathematical Offering**. Cambridge University Press, 2007.

FERNANDEZ, A. J. C. e CAVALCANTE, M. P. de A. **Introdução a Análise Harmônica e Aplicações**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2009.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.