GRUPOS TOPOLÓGICOS E AÇÕES TRANSITIVAS

Daniela Sayuri Ishizaki (PIC//UEM), Brian David Grajales Triana (Orientador). E-mail: bdgtriana@uem.br.

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática/ Geometria e Topologia.

Palavras-chave: Grupos topológicos; ações contínuas; variedades topológicas.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar a definição e as propriedades básicas dos grupos topológicos e o conceito de ação contínua de um grupo topológico sobre um espaço topológico. Em particular, serão investigadas as ações do grupo especial ortogonal sobre as esferas. A metodologia do projeto consistiu no estudo de tópicos relacionados à topologia geral, teoria de grupos e suas ações contínuas, por meio da leitura e análise dos materiais bibliográficos selecionados.

INTRODUÇÃO

O estudo de grupos topológicos e de suas ações contínuas é relevante para compreender diversos objetos nas áreas de topologia e geometria. Quando essa ação é contínua e transitiva, o espaço resultante é um espaço homogêneo. Nessas estruturas, a simetria gerada pela ação do grupo permite transferir propriedades locais entre quaisquer pontos, simplificando a análise de invariantes globais. Além disso, o estudo de ações contínuas sobre espaços topológicos serve como base para a teoria dos grupos de Lie e suas ações suaves em variedades diferenciáveis.

Esta pesquisa é um estudo teórico de natureza bibliográfica, fundamentado na análise e organização de conteúdos presentes na literatura clássica de topologia geral e álgebra abstrata (Herstein, 1996; Munkres, 2000; San Martin, 2021). O objetivo principal deste trabalho é investigar as definições e propriedades elementares dos grupos topológicos, assim como formalizar e exemplificar o conceito de ação contínua de um grupo sobre um espaço topológico. De modo específico, busca-se analisar a estrutura dos subgrupos de isotropia e das órbitas, introduzir a noção de espaço homogêneo e caracterizar a ação transitiva do grupo especial ortogonal sobre esferas.

REVISÃO DE LITERATURA

Este trabalho consiste em uma pesquisa teórica de caráter bibliográfico. A metodologia baseou-se no estudo, na leitura analítica e no fichamento de materiais

bibliográficos especializados nas áreas de Topologia Geral e Álgebra Abstrata. O estudo desenvolveu-se a partir da revisão dos conceitos fundamentais de grupos topológicos, avançando para a análise rigorosa das ações contínuas de grupos sobre espaços topológicos e finalizando na caracterização dos espaços homogêneos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Definição 1. Um grupo topológico é um par $((\square,.),(\square,\square))$ formado por um grupo e um espaço topológico com o mesmo conjunto subjacente tal que a aplicação $\square:\square\times\square\to\square$, definida por $\square(\square,\square)=\square\square^{-1}$ é contínua.

Proposição 1. Seja G um grupo topológicos e $\square\in\square$, temos que as as seguintes aplicações são homeomorfismos:

1. $\square_\square:\square\to\square$, definida por $\square_\square(\square)=\square\square$ (translação à esquerda);
2. $\square_\square:\square\to\square$, definida por $\square_\square(\square)=\square\square$ (translação à direita);
3. $\square_\square:\square\to\square$, definida por $\square_\square(\square)=\square\square\square^{-1}$ (conjugação).

Exemplo 1. Alguns exemplos de grupos topológicos:

1. O grupo linear geral $\square\square(\square,\square)$ é grupo das matrizes inversíveis de ordem $\square$ com a topologia induzida pela topologia de $\square(\square,\square)$.
2. O grupo ortogonal $\square(\square)$ das matrizes de ordem $\square$ ortogonais, isto é, matrizes tais que $\square^\square\square=\square\square_\square=\square\square^\square$, com $\square\in\square(\square,\square)$ e $\square^\square$ denotando a transposta de $\square$.
3. O grupo ortogonal especial $\square\square(\square)$ das matrizes ortogonais de ordem $\square$ com determinante igual a 1.
4. O grupo unitário $\square(\square)$ das matrizes com entradas em $\square$, de ordem $\square$, unitárias, ou seja, $\square\in\square(\square,\square)$ tal que a matriz transposta conjugada de $\square$ é igual inversa de A e o produto dela por $\square$ é igual a matriz identidade de ordem $\square$.
5. O grupo unitário especial $\square\square(\square)$ das matrizes unitárias de ordem $\square$ com determinante igual a 1.

Definição 2. Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G. Considerando em H a topologia induzida pela de G, ela faz de H um grupo topológico. De fato, seja $\square:\square\times\square\to\square$ a aplicação definida por $\square(\square,\square)=\square\square^{-1}$ contínua, sua restrição a $\square\times\square$ é também contínua. Mas como H é subgrupo de G, $\square(\square\times\square)\subset\square$ como desejado. Se H contiver um ponto interior, então H é dito um subgrupo aberto.

Proposição 2. A aderência $\bar{H}$ de um subgrupo H de G é também um subgrupo de G. Se H é normal, $\bar{H}$ também o é; se H é comutativo, $\bar{H}$ também é comutativo.

Exemplo 2. □(□) é um subgrupo fechado de □□(□, □).

Proposição 3. Todo subgrupo aberto é fechado.

Definição 3. Seja □ um grupo e □ um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de □ em □ é uma aplicação ϕ: □ × □ → □ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\phi(□, □) =$ □, onde □ denota o elemento neutro de □;
2. $\phi(□□, □) =$ □(□, □(□, □)), □, □ ∈ □ e □ ∈ □.

Exemplo 3.

1. □□(□, □) e □ = □$^{□}$. A ação ϕ é a multiplicação usual de uma matriz de ordem □ por um vetor (coluna) □ × *1*.
2. Sejam □ um subgrupo de um grupo □ e □ = □/□, o conjunto das classes laterais (à esquerda) de □ em □. Então ϕ: □ × □/□ → □/□, definida por $\phi(□, □□) =$ □□□, é chamada de ação por translação nas classes laterais.
3. Seja □ = □^{1} e □ = □. A ação de □^{1} em □, definida por $\phi(□, □) =$ □□, é chamada ação polar. Ela rotaciona o elemento por um ângulo que é exatamente o argumento desse número complexo que tem norma 1.
4. A aplicação ϕ: □□(□) × □$^{□-1}$ → □$^{□-1}$ definida por $\phi(□, □) =$ □□ é uma ação de □□(□) em □$^{□-1}$.

Definição 4. Se um grupo □ age em um conjunto □ e □ ∈ □, a órbita de □ por □, denotada por □□, é definida como o conjunto □ · □ = {□□ ∈ □; □ \□ □}. Duas órbitas □ · □ e □ · □ coincidem se, e somente se, existir □ ∈ □, tal que □ = □□. Tal relação define uma relação de equivalência, em que cada órbita caracteriza uma classe de equivalência.

Definição 5. Se □ age em um conjunto □ e □ ∈ □, o subgrupo de □ □$_{□}$ = {□ ∈ □; □□ = □} é chamado subgrupo de isotropia de x ou estabilizador de □. Além disso, se existir □$_{0}$ ∈ □ tal que □$_{□_{0}}$ = □, então □$_{0}$ diz-se um ponto fixo pela ação de G.

Exemplo 4. Considere a ação polar do exemplo 3. Se □ ∈ □*, então □ · □ = {□□; □ ∈ □^{1}} é a circunferência centrada na origem de raio |□|. Mas se □ = *0*, então □ · □ = {*0*}. Além disso, o único ponto fixo dessa ação é a origem □ = *0*.

Definição 6. Uma ação de um grupo □ sobre um conjunto □ é dita transitiva se □ é uma órbita de □, isto é, para todo par de elementos □, □ ∈ □, existe □ ∈ □, tal que □□ = □.

Exemplo 5.

1. Os itens 1, 2 e 4 do exemplo 3 são ações transitivas.

2. O grupo ortogonal $\square(\square)$ agindo sobre o conjunto $\square$ de todas as bases ortonormais do $\square^{\square}$, com o produto canônico, também é uma ação transitiva.

Proposição 4. Suponha que ϕ é uma ação transitiva de $\square$ em $\square$, fixado $\square \in \square$, temos que a aplicação $\square_{\square}: \square/\square_{\square} \to \square$, definida por $\xi_{\square}(\square\square_{\square}) = \square\square$, é bijetora.

Definição 7. Sejam $\square$ grupo topológico e $\square$ um espaço topológico. Uma ação de G em X é contínua se a aplicação $\phi: \square \times \square \to \square$, $\phi(\square, \square) = \square\square$, é contínua.

Proposição 5. Suponha que a ação de $\square$ em $\square$ seja contínua e que $\square$ seja espaço de Hausdorff. Então, todo subgrupo de isotropia é fechado.

Definição 8. Seja G um grupo topológico e H um subgrupo fechado de G. O conjunto das classes laterais à esquerda $\square/\square$, munido com a topologia quociente é denominado espaço homogêneo.

Teorema 1. Seja ϕ uma ação contínua e transitiva de $\square$ em $\square$, fixado $\square \in \square$, a bijeção $\square_{\square}: \square/\square_{\square} \to \square$ dada por $\xi_{\square}(\square\square_{\square}) = \square\square$ é contínua em relação a topologia quociente em $\square/\square_{\square}$.

Teorema 2. Seja $\square \times \square \to \square$ uma ação contínua e transitiva. Suponha que $\square$ seja localmente compacto e separável e que $\square$ seja de Hausdorff e um espaço de Baire. Então, as aplicações $\square_{\square}: \square/\square_{\square} \to \square$ são homeomorfismos.

Exemplo 6. $\square\square(3)/\square\square(2)$ é homeomorfo a $\square^2$.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram consolidadas as definições e propriedades básicas dos grupos topológicos, bem como o conceito de ação contínua de um grupo topológico sobre um espaço topológico. Em especial, foram analisados exemplos concretos de ações contínuas, tais como a ação do grupo especial ortogonal $\square\square(\square)$ sobre as esfera $\square^{\square-1}$e o homeomorfismo $\square\square(3)/\square\square(2) \approx \square^2$.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Brian David Grajales Triana, pela excelente orientação, apoio e paciência ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

HERSTEIN,I.N. Abstract Algebra. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall,1996.

MUNKRES, James R. Topology. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000.

SAN MARTIN, Luiz A. B. Topological groups. In: SAN MARTIN, Luiz A. B. Lie Groups. Cham: Springer, 2021. cap. 2. p. 37-82 (Latin American Mathematics Series).

MARTINS RODRIGUES, Alexandre A. Grupos topológicos. In: MARTINS RODRIGUES, Alexandre A. Introdução à Teoria dos Grupos de Lie. São Paulo: LPM,1967. cap1. p. 1-21.