MATEMÁTICA APLICADA À PROGRAMAÇÃO LINEAR: UM MÉTODO SIMPLEX BASEADO EM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Vitor Madeira Lorençone (PIC), Emerson Vitor Castelani (Orientador). E-mail: evcastelani@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Matemática / Matemática Aplicada

Palavras-chave: Álgebra Geométrica; Algoritmo Simplex; Métodos Numéricos.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma reformulação do método Simplex clássico de programação linear utilizando os fundamentos da Álgebra Geométrica (AG) em substituição à Álgebra Linear (AL) tradicional. O objetivo é desenvolver um algoritmo alternativo que, embora não supere o Simplex convencional em eficiência geral, ofereça maior clareza geométrica na representação do problema e apresente vantagens computacionais em cenários específicos, como a resolução sequencial de problemas semelhantes que diferem por algumas restrições. A metodologia consiste em reescrever o problema de programação linear no padrão de maximização, introduzindo variáveis de folga, e então calcular o produto geométrico de todas as restrições, sendo a operação de maior custo computacional do método. Uma vez obtido esse multivetor, que reúne implicitamente todas as combinações possíveis de tableaus, as operações de pivoteamento tornam-se computacionalmente baratas, permitindo atualizar a função objetivo em número de iterações equivalente ao Simplex tradicional. Observou-se que todo esse cálculo prévio nos possibilita reaproveitar valores entre problemas correlatos. O algoritmo foi implementado em Julia utilizando a biblioteca MinGal, desenvolvida pelos autores em um projeto anterior de iniciação científica. Conclui-se que a abordagem geométrica constitui um método de fácil entendimento e possivelmente vantajoso em cenários de otimização contínua de problemas com variáveis similares, contribuindo para a compreensão intuitiva do Simplex e para a literatura de aplicações da álgebra geométrica em otimização.

INTRODUÇÃO

A programação linear é uma das áreas mais comentadas dentro da otimização matemática, com aplicações que vão do planejamento logístico à engenharia, representando uma ampla gama de situações práticas. Dentre os métodos clássicos para resolução de problemas de programação linear, o método Simplex, proposto por George Dantzig em 1947, permanece como referência fundamental, sendo amplamente utilizado por sua eficiência prática, apesar de sua

complexidade do pior caso ser exponencial, descrito como □(2□), para □ sendo o número de variáveis de decisão do problema (Dantzig, 1963).

Paralelamente, a Álgebra Geométrica (AG) tem se consolidado como uma linguagem matemática capaz de expressar de forma compacta conceitos de álgebra linear, geometria analítica e cálculo vetorial por meio de um único formalismo algébrico baseado no produto geométrico (Dorst; Fontijne; Mann, 2009). Sua capacidade de representar subespaços, rotações e projeções de maneira intrínseca tem motivado sua aplicação em áreas como computação gráfica, robótica, física e também otimização (Perwass, 2009).

Este trabalho tem como objetivo investigar a viabilidade de uma reformulação do método Simplex utilizando os operadores da álgebra geométrica, substituindo as operações matriciais tradicionais (pivoteamento por linhas) pelo produto geométrico entre os multivetores que representam as restrições do problema. A pesquisa é de caráter teórico-computacional, com desenvolvimento de algoritmo próprio e implementação em linguagem Julia, utilizando a biblioteca de álgebra geométrica MinGal, desenvolvida pelos autores em projetos anteriores (Lorençone, 2025). Busca-se, com isso, não superar o desempenho do Simplex clássico em problemas gerais, mas oferecer uma alternativa geometricamente interpretável e computacionalmente vantajosa em situações de execuções simultâneas, isto é, quando múltiplos problemas semelhantes precisam ser resolvidos sucessivamente.

MATERIAIS E MÉTODOS

A AG tem origem nos trabalhos de Hermann Grassmann (1844) sobre álgebra exterior e de William Kingdon Clifford (1878), que unificou os produtos interno e externo no então operador de produto geométrico. Para dois vetores □ e □ em um espaço euclidiano, o produto geométrico é definido como:

$$□□ = □ \cdot □ + □ \wedge □$$

Em que □ · □ é o produto interno e □ ∧ □ é o produto externo, que representa a área orientada do paralelogramo formado pelos dois vetores (Dorst; Fontijne; Mann, 2009). Diferentemente da álgebra vetorial clássica, a AG permite operar diretamente com multivetores, que são somas de elementos de diferentes graus (escalares, vetores, bivetores...), dentro de uma única álgebra fechada, o que elimina a necessidade de recorrer a representações matriciais para transformações geométricas (Perwass, 2009). Essa característica é o que torna a AG atrativa para a reformulação proposta neste trabalho, visto que cada restrição linear de um problema de otimização pode ser tratada como um vetor em um espaço de dimensão igual ao número de variáveis (incluindo as de folga), e o produto geométrico entre essas restrições passa a condensar, em um único multivetor, informações equivalentes a múltiplos tableaus do Simplex.

Por sua vez, o método Simplex resolve problemas de programação linear na forma padrão:

$$□□□ \ □^{□}□ \ □□□□□□□□ \ □ \ □□ \leq □, □ \geq 0$$

em que □ □ □^{□×□}, □ □ □^{□} e □ □ □^{□}. O procedimento clássico consiste em (i) introduzir variáveis de folga para converter as desigualdades em igualdades, (ii) construir o tableau inicial a partir de uma solução básica factível, (iii) identificar a variável de entrada (coeficiente mais negativo na linha da função objetivo), (iv) identificar a variável de saída pelo teste da razão mínima, (v) realizar o pivoteamento, atualizando o tableau, (vi) repetir os passos de (iii) a (v) até que não haja mais coeficientes negativos na função objetivo, indicando otimalidade (Dantzig, 1963). Geometricamente, cada iteração corresponde a caminhar entre vértices adjacentes do politopo definido pelas restrições, sempre na direção de crescimento da função objetivo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante os trabalhos no projeto, foram percebidas e desenvolvidas as seguintes etapas gerais, em forma de algoritmo, para escrever e resolver o problema utilizando conceitos da álgebra geométrica.

Seja a função objetivo □(□) de □ variáveis, descrita no formato padrão de maximização e □_{1…□} o conjunto de todas as restrições estipuladas, escritas em formato de multivetores da AG de espaço projetivo □□(□ + □, *0,1*) com as suas devidas variáveis de folga estipuladas. Inicialmente, (i) calcula-se □ = □_{*1*}□_{*2*}…□_{□} o produto geométrico de todas as restrições e define-se a base trivial como □, descrita com as variáveis de folga estabelecidas (agora blades canônicos). O multivetor □ combina implicitamente todas as configurações possíveis de tableaus do problema. Depois (ii), verifica se todos os coeficientes de □(□) são positivos, como condição de otimalidade. Caso não, (iii) escolha o elemento com o menor coeficiente de □(□), que será a coluna pivô. Para cada restrição da base □ (iv), descubra a linha pivô com o teste da razão mínima. (v) Atualize os valores da base □ e da função objetivo □(□) de acordo com a linha pivô. (vi) Volte ao passo (ii) e repita até atingir a condição de parada. Por fim, leia o resultado final na função de objetivo □(□) gerada.

Uma propriedade central identificada é que as diversas combinações lineares que são realizadas no Simplex clássico não precisam ser feitas com este método, já que □ centraliza todas as possibilidades. Isso decorre da natureza multilinear do produto exterior, componente do produto geométrico, que já está implícito no cálculo, responsável por calcular todas as variações possíveis. Como consequência prática, quando um conjunto de problemas compartilha a maioria de suas restrições e difere apenas em uma ou poucas delas, é possível reaproveitar o produto geométrico previamente computado e inserir apenas as restrições modificadas, evitando o recálculo completo, que é a etapa mais custosa do método. Além disso, implica também que todo o cálculo iterativo de pivotamento será simplificado em questão de complexidade computacional.

O algoritmo foi implementado na linguagem Julia, escolhida por seu desempenho numérico e suporte nativo para matemática, utilizando a biblioteca de álgebra geométrica MinGal.jl. A biblioteca fornece as estruturas de multivetores e as

operações de produto geométrico, exterior e interno necessárias à implementação, além de documentação própria dos tipos e funções utilizados.

Por fim, observou-se que, embora com o alto custo de cálculo inicial (pago apenas uma vez), cada operação de pivoteamento pôde ser realizada por meio de projeções sobre o multivetor já calculado, com custo inferior ao da reconstrução matricial tradicional. O número de iterações necessárias até a convergência manteve-se equivalente ao do Simplex clássico, já que a lógica de escolha de variáveis de entrada e saída foi preservada.

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma reformulação do método Simplex utilizando álgebra geométrica, substituindo as operações matriciais tradicionais pelo cálculo do produto geométrico entre as restrições do problema. Embora o método proposto não seja competitivo com o Simplex clássico em termos de eficiência geral, devido ao alto custo do cálculo inicial do produto geométrico, ele demonstrou vantagens relevantes em aspectos de maior clareza e interpretabilidade geométrica do processo de otimização e possibilidade de aplicação em cenários de múltiplos problemas semelhantes, diferindo por poucas restrições, em que precisam ser resolvidos sequencialmente.

REFERÊNCIAS

DANTZIG, G. B. **Linear Programming and Extensions.** Princeton: Princeton University Press, 1963.

DORST, L.; FONTIJNE, D.; MANN, S. **Geometric Algebra for Computer Science (Revised Edition): An Object-Oriented Approach to Geometry.** Burlington: Morgan Kaufmann, 2009.

PERWASS, C. **Geometric Algebra with Applications in Engineering.** Berlin: Springer, 2009. (Springer Series in Geometry and Computing).

LORENCONE, V. **Código fonte da MinGal.jl no GitHub.** [S. l.], 2025. Disponível em: https://github.com/VitorLorencone/Mingal.jl. Acesso em: 28 ago. 2025.

GRASSMANN, H. **The Theory of Extension: A New Branch of Mathematics**. Leipzig: Otto Wigand, 1844.

CLIFFORD, W. K. **Applications of Grassmann's Extensive Algebra**. Baltimore: American Journal of Mathematics, v. 1, n. 4, p. 350–358, 1878.