GRAFOS: TEORIA E APLICAÇÕES

Evandro Junior Cruz Padilha e Maria Eloíza de Andrade (PIC//UEM), Emerson Luiz do Monte Carmelo (Orientador). E-mail: elmcarmelo@uem.br

Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Maringá, PR.

Área e subárea do conhecimento: Matemática/Matemática Discreta e Combinatória

Palavras-chave: árvores; percursos eulerianos; ciclos hamiltonianos.

RESUMO

A Teoria dos Grafos é uma área da Matemática Discreta dedicada ao estudo de estruturas formadas por vértices e arestas. Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo introdutório de conceitos fundamentais e de algumas classes de grafos. Foram estudados subgrafos, conexidade, caminhos e ciclos, com ênfase em árvores, grafos eulerianos e grafos hamiltonianos. Entre os principais resultados analisados, constam as propriedades estruturais das árvores, a caracterização dos grafos eulerianos e condições para a existência de ciclos hamiltonianos. Os resultados mostram como conceitos elementares se articulam na investigação de propriedades globais dos grafos. O estudo estabelece uma base teórica para o aprofundamento posterior em problemas e aplicações da Teoria dos Grafos.

INTRODUÇÃO

A origem da Teoria dos Grafos está historicamente associada ao problema das pontes de Königsberg, cujo desafio consistia em realizar um percurso passando pelas pontes da cidade sem repetir nenhuma delas. A impossibilidade desse percurso foi demonstrada por Leonhard Euler em 1736, episódio considerado um marco inicial da área (Chartrand; Lesniak; Zhang, 2011).

Em meados do século XIX, diferentes problemas ampliaram o interesse pela Teoria dos Grafos, entre eles a coloração de mapas, o estudo de ciclos hamiltonianos e o uso de árvores na modelagem de circuitos elétricos e de estruturas moleculares (Rosen, 2009).

Atualmente, a Teoria dos Grafos é uma ferramenta versátil na modelagem de problemas em diversos campos da ciência, como química, biologia, engenharia elétrica, telecomunicações, pesquisa operacional, ciência da computação e otimização de recursos (Chartrand; Lesniak; Zhang, 2011; Rosen, 2009; Scheinerman, 2011).

O presente projeto é um estudo introdutório da Teoria dos Grafos sob um ponto de vista matemático, abordando problemas clássicos da área. Em particular, estudamos propriedades de algumas classes de grafos, como árvores, grafos eulerianos e grafos hamiltonianos.

REVISÃO DE LITERATURA

Necessitamos mencionar alguns conceitos fundamentais. Um grafo G=(V,E) é constituído por um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E, em que cada aresta é formada por um par não ordenado de vértices distintos. Essa representação permite estudar matematicamente as relações existentes entre os objetos do grafo. Dois vértices são adjacentes quando existe uma aresta formada por eles, enquanto uma aresta é incidente aos vértices que ela conecta.
Outro conceito fundamental é o grau de um vértice, que corresponde à quantidade de arestas incidentes a esse vértice. A sequência de graus de um grafo é formada pelos graus de seus vértices e permite analisar algumas de suas propriedades estruturais. O método de dupla contagem da Combinatória permite provar um dos primeiros resultados fundamentais, enunciado abaixo.

Teorema 1: Dado um grafo G=(V,E) com m arestas, a soma dos graus de todos os vértices é igual a 2m.

Tal resultado é também conhecido como “lema do aperto de mãos”. Como consequência, obtém-se outro resultado importante: em qualquer grafo, a quantidade de vértices que possuem grau ímpar é sempre par. Assim, não é possível existir um grafo com exatamente um ou três vértices de grau ímpar.
Um grafo H=(V',E') é um subgrafo de G=(V,E) quando V' é um subconjunto de V e E' é um subconjunto de E. Para estudar a conexão entre os vértices de um grafo, são introduzidos conceitos que permitem relacionar diferentes modos de percorrer suas arestas. Um passeio é uma sequência alternada de vértices e arestas na qual cada aresta conecta dois vértices consecutivos. Em um passeio, tanto vértices quanto arestas podem ser repetidos. Uma trilha é um passeio no qual nenhuma aresta é percorrida mais de uma vez. Um caminho, por sua vez, é uma trilha na qual nenhum vértice é repetido. Dessa forma, todo caminho é uma trilha e toda trilha é um passeio.
Também são definidos os conceitos de circuito e ciclo. Um circuito é uma trilha fechada, enquanto um ciclo é um circuito no qual nenhum vértice é repetido, exceto o primeiro e o último. Esses conceitos permitem definir conexidade. Um grafo é conexo quando existe um caminho entre quaisquer dois de seus vértices.
As árvores constituem uma classe importante de grafos conexos. Uma árvore é definida como um grafo conexo que não possui ciclo.

A partir dos conceitos de caminhos e ciclos, é possível estudar percursos que visitam todos os vértices de um grafo. Um caminho hamiltoniano é um caminho que contém todos os vértices do grafo exatamente uma vez. Já um ciclo hamiltoniano é um ciclo que contém todos os vértices do grafo.
A diferença entre os dois conceitos está no retorno ao vértice inicial. No caminho hamiltoniano, o percurso inicia em um vértice e termina em outro. No ciclo

hamiltoniano, após visitar todos os vértices, o percurso retorna ao vértice de partida. Um grafo que possui um ciclo hamiltoniano é chamado de grafo hamiltoniano.
O estudo desses grafos relaciona-se diretamente aos conceitos de caminho e ciclo, evidenciando situações em que definições básicas podem ser utilizadas para investigar propriedades mais específicas de uma estrutura.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Descrevemos alguns resultados clássicos estudados no projeto.

O estudo de subgrafos permite observar como estruturas menores podem ser obtidas a partir de um grafo, enquanto os conceitos de passeio, trilha, caminho, circuito e ciclo fornecem uma linguagem para analisar diferentes formas de percorrer suas arestas.
Redes de transmissão de energia podem ser modeladas por meio de árvores, e outras aplicações aparecem em diferentes contextos de modelagem (Chartrand; Lesniak; Zhang, 2011; Rosen, 2009; Scheinerman, 2011). No estudo das árvores, destacaram-se dois teoremas.

Teorema 2: Em uma árvore, existe um único caminho entre quaisquer dois vértices.

O Teorema 2 evidencia uma propriedade estrutural importante das árvores. Por meio de contagem via indução finita, obtemos ainda o resultado seguinte.

Teorema 3: Uma árvore possui sempre uma aresta a menos que sua quantidade de vértices.

Por exemplo, uma árvore com cinco vértices possui quatro arestas, enquanto uma árvore com dez vértices possui nove..

Como já mencionado, a Teoria dos Grafos tem sua origem associada à solução do problema das pontes de Königsberg. Uma generalização desse tipo de percurso conduz ao estudo dos grafos eulerianos, cuja caracterização pode ser expressa em termos dos graus dos vértices (Rosen, 2009).

Teorema 4: Um grafo conexo é euleriano (admite um passeio fechado que passa por todas as arestas uma única vez) se, e somente se, o grau de todo vértice é par.

Além de sua importância histórica, grafos eulerianos e conceitos correlatos permitem formular procedimentos eficientes para certos problemas de logística e transporte (Rosen, 2009).

Um conceito relacionado é o de grafo hamiltoniano, isto é, um grafo que possui um ciclo que passa por todos os seus vértices. Grafos hamiltonianos aparecem em

modelos de otimização de rotas (Rosen, 2009). Embora grafos eulerianos possuam uma caracterização simples em termos dos graus dos vértices, a hamiltonicidade exige condições de natureza distinta.
Estudamos algumas condições necessárias para a existência de grafos hamiltonianos e também condições suficientes. Um exemplo é o resultado a seguir, apresentado em Chartrand, Lesniak e Zhang (2011).

Teorema 5: Seja G um grafo simples com n≥3 vértices. Se o grau de cada vértice é pelo menos n/2, então G é hamiltoniano.

Esses resultados ampliam o estudo dos caminhos e ciclos e mostram como propriedades locais dos vértices podem influenciar a existência de percursos que passam por todo o grafo.

CONCLUSÕES

O estudo em curso está permitindo construir uma introdução sistemática à Teoria dos Grafos, partindo das definições fundamentais e avançando para propriedades e problemas relacionados a percursos. Combinações dos resultados sobre grau de vértices, subgrafos, conexidade e árvores mostram como diferentes propriedades podem ser relacionadas para compreendermos a estrutura de um grafo.
O estudo dos caminhos, trilhas, circuitos e ciclos forneceu a base necessária para investigar grafos eulerianos e hamiltonianos, nos quais a existência de percursos que visitam todos os vértices assume papel central. Assim, o trabalho está estabelecendo uma base teórica para o aprofundamento posterior no estudo de problemas mais específicos da Teoria dos Grafos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao PET/Matemática e ao programa de iniciação científica da UEM pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho e pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

CHARTRAND, G.; LESNIAK, L.; ZHANG, P. **Graphs and Digraphs.** 5. ed. Boca Raton: CRC Press, 2011.

ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e Suas Aplicações.** 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta: Uma Introdução.** 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.